Задачи о взаимном расположении плоскостей

Углы и расстояния между плоскостями

Пусть плоскости заданы общими уравнениями:

π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Тогда плоскости

1) $\pi_1 \cap \pi_2 \iff$ тройка коэф-в A_1, B_1, C_1 не пропорциональна тройке коэф-в A_2, B_2, C_2;

2) $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

3) $\pi_1 \equiv \pi_2$ (совпадают) $\iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Частный случай пересечения плоскостей

1') $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Зам. Пункты 1)-3) верны в любой аффинной системе координат, пункт 1') — только в прямоугольной.

У нас сист. к-т всегда прямоугольная.

Исследовать взаимное расположение плоскостей. Если они пересек., то найти угол между ними. Если они не пересек., то найти расстояние между ними.

№2.185.

$\pi_1: \ -x+2y-z+1=0$

$\pi_2: \ y+3z-1=0$

Решение.

1) Выпишем коэфф-ты из ур-ий π_1 и π_2:

$A_1=-1, \ B_1=2, \ C_1=-1, \ D_1=1$

$A_2=0, \ B_2=1, \ C_2=3, \ D_2=-1$

$\frac{-1}{0} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3}$ (достаточно нарушения хотя бы одного равенства)

След, $\pi_1 \cap \pi_2$ (пересекаются)

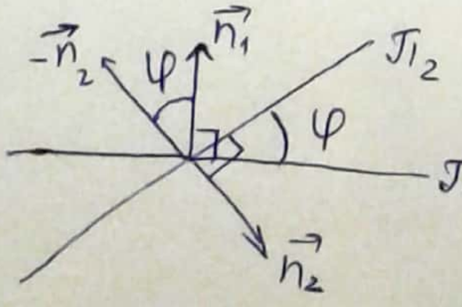
2) Найдём $\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2})$ как косинус угла между нормалями к плоскостям. Нормали к плоскостям:

$\vec{n_1}=\{A_1, B_1, C_1\}=\{-1, 2, -1\}$

$\vec{n_2}=\{A_2, B_2, C_2\}=\{0, 1, 3\}$

$$\cos(\widehat{\vec{n_1}, \vec{n_2}})=\frac{\vec{n_1}\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{-1\cdot 0+2\cdot 1+(-1)\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+1^2+3^2}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{10}}=\frac{-1}{2\sqrt{15}}$$ ($<0 \Rightarrow$ угол между $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ тупой)



Возьмём $-\vec{n_2}$. Тогда

$\cos(\widehat{\vec{n_1}, -\vec{n_2}})=\frac{1}{2\sqrt{15}}$

След, угол между π_1 и π_2:

$\varphi=\arccos\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

Зам. Кратко:

$$\cos\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})| = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

по модулю

След, $\varphi = \arccos|\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})|$.

Ответ: пересекаются; $\arccos\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

№ 2.186.

$\pi_1: 2x - y + z - 1 = 0$

$\pi_2: -4x + 2y - 2z - 1 = 0$

Решение.

1) $A_1 = 2,\ B_1 = -1,\ C_1 = 1,\ D_1 = -1$

$A_2 = -4,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2,\ D_2 = -1$

$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$ След, $\pi_1 \parallel \pi_2$ (параллельны)

2) Разделим ур-е $2^{й}$ плоскости на -2, чтобы коэф-ты (при x, y, z) параллельных плоскостей π_1 и π_2 стали одинаковыми.

$$-4x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad |:-2$$

$$2x - y + z + \frac{1}{2} = 0$$

Теорема. Расстояние между плоскостями

$\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$

$\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$

находится по формуле

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Вычислим

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \frac{|(-1) - \frac{1}{2}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

Ответ: параллельны; $\frac{3}{2\sqrt{6}}$.

$\boxed{\text{Д/З I: № 2.187, 2.188.}}$

Задачи на составление ур-ий плоскостей (продолжение)

№1.

Написать ур-е плоскости, проходящей через точку $M_0(-1, -2, -3)$ и отсекающей от осей координат равные отрезки.

Решение.

Ур-е плоскости в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

По усл. $a = b = c$. След, ур-е плоскости

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \quad \Big| \cdot a$$

$$x + y + z = a$$

$\boxed{\text{Д/З II № 2.190}}$

Найдём a.

$M_0 \in$ плоскости $\Rightarrow (-1) + (-2) + (-3) = a$

$$-6 = a$$

$$a = -6$$

Подставим в ур-е плоскости:

$$x + y + z = -6$$

$$x + y + z + 6 = 0$$

Ответ: $x + y + z + 6 = 0$

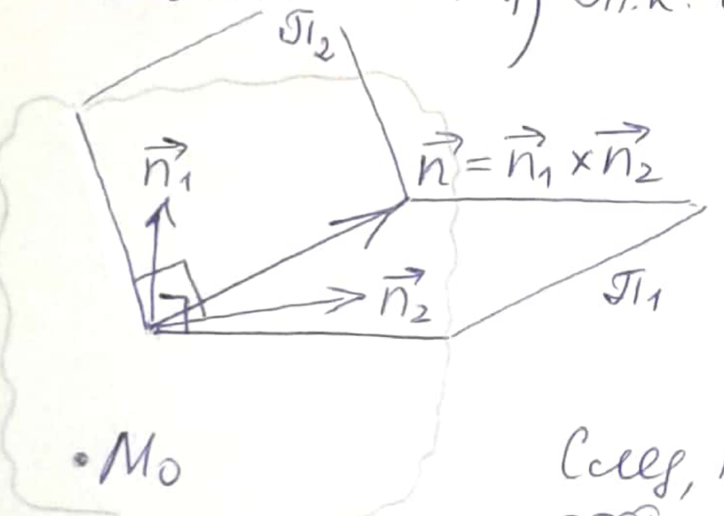
№ 2. $\boxed{\text{ДЗ III № 2.196}}$

Составить ур-е плоскости, проходящей через точку $M_0(0,-1,2)$ и перпендикулярной к плоскостям

$\pi_1: \; x+2y+3z+4=0$

$\pi_2: \; 5x-4y-3z-2=0$

Решение. 1) Т.к. искомая плоскость π перпендикулярна плоскостям π_1 и π_2, то она перпендикулярна прямой, по которой π_1 и π_2 пересекаются.



След, направляющий вектор этой прямой явл. нормалью к искомой плоскости.

Найдём напр. вектор прямой пересечения плоскостей:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -4 & -3\end{vmatrix}=6\vec{i}+18\vec{j}-14\vec{k}$$

т.к. $\vec{n}_1=\{1,2,3\}$, $\vec{n}_2=\{5,-4,-3\}$

След., $\vec{n}=\{6,18,-14\}$.

В качестве $\vec{n}$ можно взять коллинеарный вектор: $\vec{n}=\{3,9,-7\}$ (его координаты пропорциональны координатам найденного вектора)

2) Теорема. Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная вектору $\vec{n}\{A, B, C\}$ имеет уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=$

Из условия нам известна точка M_0 плоскости,
из действия 1) — нормаль $\vec{n}$ к плоскости.
След. ур-е искомой плоскости:

$$3(x-0)+9(y-(-1))+(-7)(z-2)=0.$$

Упростим уравнение:

$$3x+9y+9-7z+14=0$$

$$3x+9y-7z+23=0$$

Ответ: $3x+9y-7z+23=0$.