Семинар 8.

Уравнения прямых в пространстве

№ 2.197(а)   ДЗ I :№ 2.197(б)

Прямая l задана общими уравнениями, т.е. (как пересечение двух плоскостей):

$$\begin{cases} 2x-y+2z-3=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$$

Написать для этой прямой канонич. уравнения и уравнения в проекциях.

Решение.

1) Найдём направл. вектор прямой:

$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, где $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}=\{2,-1,2\}$

$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}=\{1,2,-1\}$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$$

След., $\vec{n}=\{-3,4,5\}=\{a,b,c\}$

2) Найдём точку прямой как любое частное решение системы ур-ий, задающей прямую. Пусть, напр., $z=0$. Подставим в систему ур-ий, получим:

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x-3 \\ x+2(2x-3)-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{5} \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

След., $M_0(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0\right)$.

3) Парам. ур-е прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{7}{5} + (-3)t \\ y = -\frac{1}{5} + 4t \\ z = 0 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

Канонич. ур-е прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\boxed{\frac{x - \frac{7}{5}}{-3} = \frac{y + \frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5}}$$

Уравнения прямой в проекциях:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$ это ур-е проекции прямой на пл. Oxy

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ —"— на пл. Oyz

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$ —"— на пл. Oxz

$$\frac{x - \frac{7}{5}}{-3} = \frac{y + \frac{1}{5}}{4} \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0$$

$$\frac{y + \frac{1}{5}}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow 5y - 4z + 1 = 0$$

$$\frac{x - \frac{7}{5}}{-3} = \frac{z}{5} \Rightarrow 5x + 3z - 7 = 0$$

№2.198.

Написать канонич. ур-е прямой, проходящей через точку $M_0(2,0,-3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{q}\{2,-3,5\}$;

б) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox;

г) оси Oz;

д) прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$;

е) прямой $\begin{cases} x=-2+t \\ y=2t \\ z=1-\frac{1}{2}t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Решение.

Канонич. ур-е прямой: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$,

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - точка прямой,

$\vec{m}\{a,b,c\}$ - направляющий вектор прямой.

а) Возьмём $\vec{m}=\vec{q}$. Получим

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-(-3)}{5} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}}$$

б) Возьмём $\vec{m}=\{5,2,-1\}$ - напр. вектор заданной прямой.

Получим

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-(-3)}{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}}$$

4

в) Возьмём $\vec{m}=\{1,0,0\}=\vec{i}$ – напр. вектор оси Ox.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$$

г) Возьмём $\vec{m}=\vec{k}=\{0,0,1\}$ – напр. вектор оси Oz.

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

д) Возьмём $\vec{m}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}$

Можно взять коллинеарный $\vec{m}=\{-2,4,5\}$

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$$

е) Возьмём $\vec{m}=\{1,2,-\frac{1}{2}\}$ – напр. вектор заданной прямой (это коэф-ты при t)

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{Д/З } \overline{\text{II}}: \text{№}2.199}$

Задачи о взаимном расположении прямых в пространстве

№ 2.203(а) Д13 III: № 2.203(б)

Убедиться, что прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости, и написать ур-е этой плоскости:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$$

$$l_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

<u>Теорема</u> Прямые $l_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$

$l_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$

принадлежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$ (т.е. три вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$ компланарны)

Решение.

1) Выпишем для прямых l_1 и l_2 по точке и направл. вектору.

Для l_1: $M_1(1,-2,5)$, $\vec{m}_1\{2,-3,4\}$.

Для l_2: $M_2(7,2,1)$, $\vec{m}_2\{3,2,-2\}$.

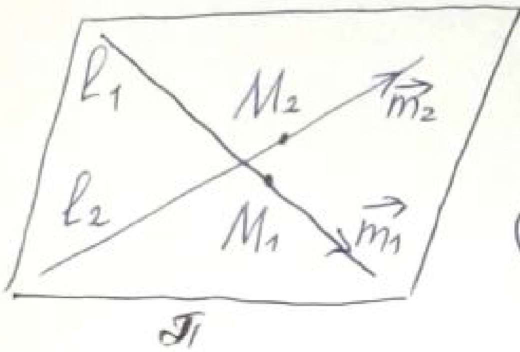
Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-1 & 2-(-2) & 1-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow l_1$ и l_2 лежат в одной пл.

Причём $l_1 \cap l_2$, т.к. направ. векторы $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ не пропорциональны.

2)



Напишем общее ур-е пл. π, зная хотя бы одну её точку (напр., M_1) и пару неколлин. векторов $\vec{m}_1, \vec{m}_2$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & a_1 & a_2 \\ y-y_1 & b_1 & b_2 \\ z-z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-(-2) & -3 & 2 \\ z-5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Упрощая определитель, получим $2x-16y-13z+31$

Ответ: $2x-16y-13z+31=0$.

№2.214(а) $\boxed{\text{ДЗ IV №2.215 (а)}}$

Для заданных прямых п. б, г решим позже.

$l_1: \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$, $l_2: \dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$

а) доказать, что они не лежат в одной плоскости (т.е. скрещиваются)

Док-во. См. т-му в задаче №2.203.

1) Для l_1: $M_1(-7,-4,-3)$, $\vec{m}_1\{3,4,-2\}$

Для l_2: $M_2(21,-5,2)$, $\vec{m}_2\{6,-4,-1\}$

Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21-(-7) & -5-(-4) & 2-(-3) \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ l_1 и l_2 не лежат в одной пл. (т.е. скрещ.)

<u>Теорема</u> Прямые $\dfrac{x-x}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$

$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_1}{c_2}$$

1) параллельны $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ и

тройка чисел $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ не пропорциональна тройке чисел

a_1, b_1, c_1;

2) совпадают $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ и

— " — " — " — " — пропорционал

≈ №2.204. $\boxed{\text{Д/З V №2.206}}$ только док-о параллельность

Док-ть, что прямые параллельны

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-3}{4}$$

Док-во:

Для l_1: $M_1(2,-1,0)$, $\vec{m_1}\{3,4,2\}$

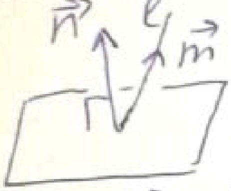
Для l_2: $M_2(7,1,3)$, $\vec{m_2}\{6,8,4\}$

$\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{2}{4}$ и тройка $(7-2, 1-(-1), 3-0)=(5,2,3)$ не пропорц. тройке $(3,4,2)$ (т.к. $\frac{3}{5}\neq\frac{4}{2}$)

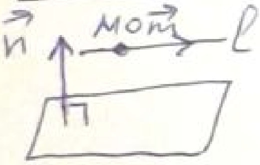
След. $l_1 \parallel l_2$.

Задачи о взаимном расположении прямой и плоскости

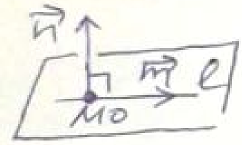
Теорема. Прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$



1) пересекаются $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$



2) параллельны $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$



3) прямая лежит в плоскости $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$\boxed{\text{Д/З VI № 2.208}}$

№*

Определите взаимное расположение прямой l: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$ и плоскости π: $x-y+2z-7=0$.

Решение.

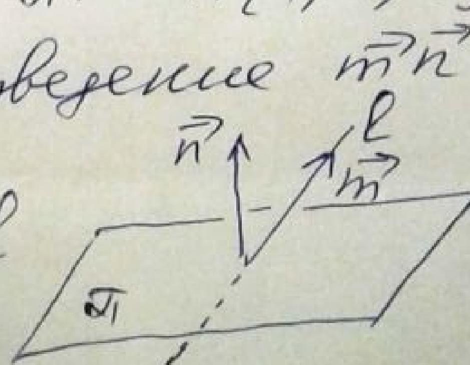
Напр. вектор прямой l: $\vec{m}\{1,2,3\}$

Нормаль к плоскости π: $\vec{n}\{1,-1,2\}$

Проверим скал. произведение $\vec{m}\vec{n}$.

$\vec{m}\vec{n}=1\cdot 1+2(-1)+3\cdot 2=5\neq 0$

След, $\vec{n}\not\perp\vec{m}\Rightarrow$ прямая l пересекает пл. π.



Доп. задание: найдем коорд-ты точки пересечения прямой и плоск-ти.

Запишем парам. ур-е l:

Обозначим $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}=t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y-1=2t \\ z+1=3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$$

Выясним, при каком t прямая пересекает плоск-ть. Для этого подст. парам. ур-е l в ур-е π:

$$t-(1+2t)+2(-1+3t)-7=0$$

$$t-1-2t-2-6t-7=0$$

$$-7t-10=0$$

$$t=-\frac{10}{7}.$$

Найдём $\begin{cases} x=-\frac{10}{7} \\ y=1+2\left(-\frac{10}{7}\right) \\ z=-1+3\cdot\frac{10}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{10}{7} \\ y=-\frac{13}{7} \\ z=-\frac{23}{7} \end{cases}$

$\Rightarrow$ в т. $M_0\left(-\frac{10}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{23}{7}\right)$.

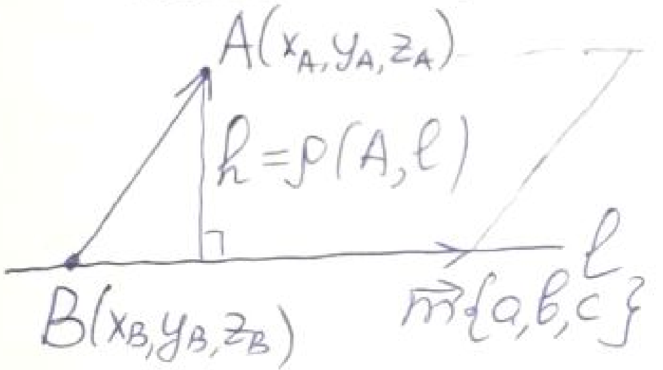
Ответ: пересекаются в т. $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{23}{7}\right)$.

Расстояния и углы в пространстве

№2.205(б) $\boxed{\text{Д/З VIII №2.205(а)}}$

Найти расстояние от точки $A(2,3,-1)$ до заданной прямой $l: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = 2t \\ z = -25-2t \end{cases}, t \in R$

Решение.



$$\rho(A,l) = \frac{|\vec{m} \times \vec{BA}|}{|\vec{m}|}$$

$B(5,0,-25)$
$A(2,3,-1)$ $\Rightarrow \vec{BA} = \{2-5, 3-0, -1-(-25)\} = \{-3, 3, 24\}$

$\vec{m} = \{3,2,-2\} \Rightarrow |\vec{m}| = \sqrt{3^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

$$\vec{m} \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 24 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}) = 3\cdot 18\vec{i} - 3\cdot 22\vec{j} + 3\cdot 5\vec{k}$$

$$|\vec{m} \times \vec{BA}| = \sqrt{(3\cdot 18)^2 + (3\cdot 22)^2 + (3\cdot 5)^2} = 3\sqrt{18^2+22^2+5^2} =$$
$$= 3\sqrt{833} = 3\sqrt{17\cdot 49} = 21\sqrt{17}$$

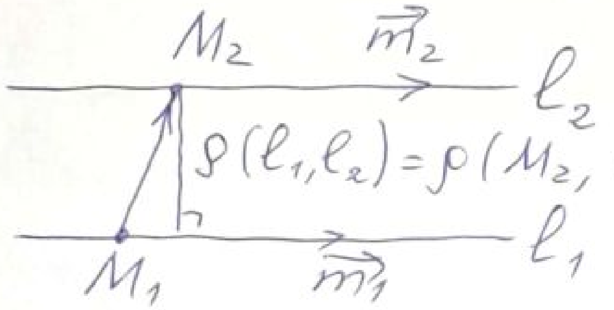
След., $\rho(A,l) = \dfrac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 21$ Ответ: 21.

№2.204 $\boxed{\text{Д/З VIII №2.206.}}$

Найти расстояние между параллельными прямыми

$$l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Решение.



$$\rho(l_1, l_2) = \rho(M_2, l_1) = \frac{|\vec{m}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{m}_1|}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_1(2,-1,0) \\ M_2(7,1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\{7-2,\ 1-(-1),\ 3-0\} = \{5,2,3\}$$

$$\vec{m}_1\{3,4,2\} \Rightarrow |\vec{m}_1| = \sqrt{3^2+4^2+2^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{m}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k}$$

$$|\vec{m}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{8^2+1^2+14^2} = \sqrt{261} = \sqrt{9 \cdot 29} = 3\sqrt{29}$$

След., $\rho(M_2, l_1) = \dfrac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3$

Ответ: 3.

№2.214 (б,в) Д/З $\overset{IX}{}$ №2.215(б,в)

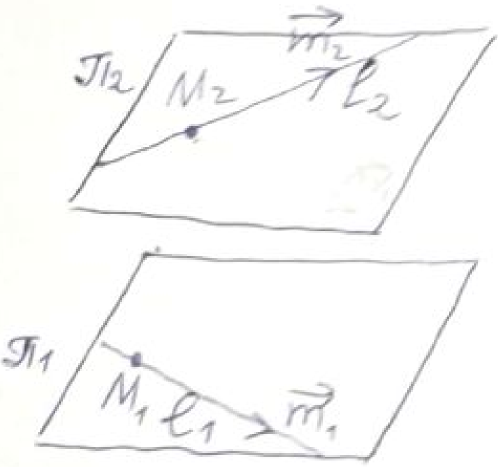
Для прямых (уже док-но, что они скрещ.)

$$l_1: \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$$

б) написать ур-е плоскости, проходящей через прямую l_2 параллельно l_1,

в) вычислить расстояние между скрещ. прямыми.

Решение.



б) Напишем общее ур-е пл. π_2, прох. через т. M_2 и пару неколлин. векторов $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-21 & y-(-5) & z-2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0$$

упрощая, получим $\boxed{4x+3y+12z-93=0}$ Ответ.

в) I способ

$$\rho(l_1,l_2)=\rho(M_1,\pi_2)=\frac{|4(-7)+3(-4)+12(-3)-93|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\boxed{13}$$

т.к. $M_1(-7,-4,-3)$

Теорема. Расстояние от т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ выч. по формуле

$$\rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Сканировано с CamScanner

<u>II способ</u> $$\rho(l_1, l_2) = \frac{V_{\text{паралл-да на } \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m_1}, \vec{m_2}}}{S_{\text{паралл-ма на } \vec{m_1}, \vec{m_2}}} =$$

$$= \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{m_1}\,\vec{m_2}|}{|\vec{m_1} \times \vec{m_2}|}.$$

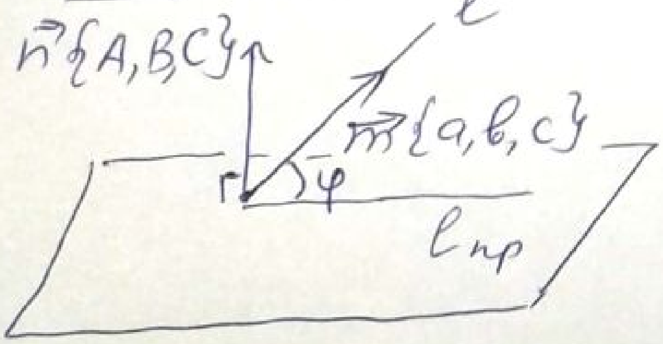
ДЗ $\overline{\text{X}}$:

Найти угол между прямой и плоскостью №2.201(а), 2.210;

угол между прямыми из задачи №2.215;

угол между плоскостями из задачи №2.185 (повторить).

<u>Теорема.</u> $$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\,\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}$$



При подготовке к РК1 по АГ полезно проработать задачи из учебного пособия:

С.Н. Ефремова, А.В. Косова, Т.А. Ласковая „Прямая и плоскость в пространстве"

Москва, 2016, МГТУ им. Баумана

Из сложных задач (часть Б) обратить внимание на задачу 21 с. 20, задачу 24 с. 23, задачу 25 с. 23

Решить все задачи из подготовки к РК

Решите №2.215: ДЗ