Подг. к РК2: №1.

① Показать, что система векторов $E_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ образует ФСР однородной СЛАУ:

$$\begin{cases}2x_1+x_3+2x_4=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-3x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+x_4=0\end{cases}$$

② Выразить через эту ФСР частное решение $X^0=\begin{pmatrix}-1\\-8\\16\\-7\end{pmatrix}$

Решение.

①

1) $A=\begin{pmatrix}2&0&1&2\\1&1&1&1\\1&-3&-1&1\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$ переставим строки $\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-3&-1&1\\1&-1&0&1\\2&0&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1),\ \cdot(-2)\\+\\+\\+\end{matrix}\sim$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-2&0\\0&-2&-1&0\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}$ $|:(-2)$, затем $+$, $+$ $\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A'$

$r=\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A'=2$, $n=4$ (число неизвестных) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ФСР состоит из $k=n-r=4-2$ векторов.

2) Проверим, что E_1 и E_2 – решение системы:

для E_1: $\begin{cases} 2\cdot 1+2+2(-2)=0 \\ 1+(-1)+2+(-2)=0 \\ 1-3\cdot(-1)-2+(-2)=0 \\ 1-(-1)+(-2)=0 \end{cases}$ верно

для E_2: $\begin{cases} 2\cdot 2+(-2)+2(-1)=0 \\ 2+1+(-2)+(-1)=0 \\ 2-3\cdot 1-(-2)+(-1)=0 \\ 2-1+(-1)=0 \end{cases}$ верно

$\Rightarrow$ решения

3) Проверим, что E_1 и E_2 линейно независимы
Они непропорциональны (ни один не выражается через другой)
$\Rightarrow$ лин. независ.

След., E_1, E_2 удовл. опр. ФСР $\Rightarrow$ это ФСР системы.

② Найдём c_1, c_2 : $X^0 = c_1E_1 + c_2E_2$, т.е. $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Решим систему отн. c_1, c_2:

$\begin{cases} c_1+2c_2=-1 \\ -c_1+c_2=-8 \\ 2c_1-2c_2=16 \\ -2c_1-c_2=-7 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -8 \\ 2 & -2 & 16 \\ -2 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1);|:3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} c_1=5 \\ c_2=-3 \end{cases} \Rightarrow X^0 = 5E_1 - 3E_2.$$

Ответ: $X^0 = 5E_1 - 3E_2$.

3

Д13. ① Показать, что сист. векторов $E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-11\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\10\\10\end{pmatrix}$ образует ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases}4x_1+4x_2+x_3-x_4=0\\15x_1+5x_2+2x_3-3x_4=0\\-3x_1+7x_2+x_3=0\\11x_1+x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$$

② Выразить через эту ФСР частное решение $X^0=\begin{pmatrix}0\\1\\-7\\-3\end{pmatrix}$

№2.

Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -1 + c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -3 + c_1 + 2c_2 \\ x_3 = c_1 + c_2 \\ x_4 = c_1 - 2c_2 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1. Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ?
2. Привести пример системы с таким решением.

Решение

1. Запишем общее решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} c_2$$

т.е. $X = X^0 + E_1 c_1 + E_2 c_2$

т.к. ни при каких c_1, c_2 точка $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ не явл. решением (из первых $2^х$ ур-ий: $\begin{matrix} 0 = -1 + c_1 + 2c_2 \\ 0 = -3 + c_1 + 2c_2 \end{matrix} \Downarrow$ $-1 = -3$ неверно)

$\Rightarrow$ СЛАУ явл. неоднородной с $n = 4$ неизвестными,

ФСР состоит из $2^х$ решений E_1, E_2

$\Rightarrow k = n - r$

$2 = 4 - r \Rightarrow r = 2.$

Чтобы ранг матрицы системы $(rg(A|B) = rg\,A)$ равнялся 2, она должна состоять минимум из $2^х$ ур-ий (чтобы в ступенчатой матрице (A') были 2 ненулевые строчки).

② <u>I способ</u>. Найдём условия на x_1, x_2, x_3, x_4, при которых $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ система

$$\begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2+3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} c_2, \text{ т.е. } \begin{cases} c_1+2c_2 = x_1+1 \\ c_1+2c_2 = x_2+3 \\ c_1+c_2 = x_3 \\ c_1-2c_2 = x_4 \end{cases}$$

относительно c_1, c_2 имеет решение.

Используем критерий Кронекера-Капелли:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1+1 \\ 1 & 2 & x_2+3 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -2 & x_4 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1+1 \\ 0 & 0 & -x_1+x_2+2 \\ 0 & -1 & -x_1+x_3-1 \\ 0 & -4 & -x_1+x_4-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1), \text{переставив вниз} \\ \cdot(-4) \quad \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1+1 \\ 0 & 1 & x_1-x_3+1 \\ \hline 0 & 0 & 3x_1-4x_3+x_4+3 \\ 0 & 0 & x_1-x_2-2 \end{array}\right) = (A'|B')$$

Система совместна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A'|B') = \operatorname{rg} A' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1-4x_3+x_4+3=0 \\ x_1-x_2-2=0 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_3+x_4=-3 \\ x_1-x_2=2 \end{cases}$$

② II способ. Из записи решения системы в вект. виде (см. п. ①) следует:

$$\begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2+3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} c_2 .$$

След., определители, составленные из любых $3^х$ строк этой записи, $=0$.

Напр., $\begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} x_2+3 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$$(x_1+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1+1)(-3) - x_3(-4) + x_4(-\ ) = 0$$

$$-3x_1 + 4x_3 - \ x_4 = 3$$

$$(x_2+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x\ \ +3)(-3) - x_3(-4) + x_4(-\ \ ) = 0$$

$$-3x_2 + 4x_3 - \ x_4 = 9$$

Получим $\begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - x_4 = 3 \\ -3x_2 + 4x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$. (Эта система экв. полученной в I сп.).

Дальше можно сразу см. стр. 8.

III способ (I и II способы короче!)

② Найдём неоднор. систему $AX=B$ из $2^х$ уравнений, имеющую данное решение.

1) Найдём однородную систему $AX=\Theta$ с данной ФСР.
Т.к. любая лин. комбинация решений однор. системы явл. решением этой системы, то с помощью лин. комбинаций E_1 и E_2 построим нормальную ФСР этой системы.

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Возьмём $-E_1+E_2=\begin{pmatrix}-1+2\\-1+2\\-1+1\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-3\end{pmatrix}$; умн. на $-\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{1}{3}E_1-\frac{1}{3}E_2=\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\0\\1\end{pmatrix}.$$ Обозн. $X^{(2)}$.

Возьмём $2E_1+E_2=\begin{pmatrix}2+2\\2+2\\2+1\\2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\\0\end{pmatrix}$; умн. на $\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{2}{3}E_1+\frac{1}{3}E_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$$ Обозн. $X^{(1)}$.

Общее решение однор. системы $AX=\Theta$:

$X = X^{(1)}d_1 + X^{(2)}d_2$, т.е. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d_1 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_2$ в вект. виде ,

$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_2 \\ x_2 = \frac{4}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_2 \\ x_3 = d_1 \\ x_4 = d_2 \end{cases}$ в коорд. виде $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1, x_2$ – базисные неизв., x_3, x_4 – свободные $\Rightarrow$ матрица однородной системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ однор. система имеет вид

$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$

2) Найдём своб. члены b_1, b_2 неоднор. сист. $AX=B$ из условия, что $X^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное решение неоднор. сист. :

Для этого подставим X^0 в неоднор. сист. $\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = b_1 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = b_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -1-\frac{4}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0=b_1 \\ -3-\frac{4}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0=b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=-1 \\ b_2=-3 \end{cases}$$

Искомая система $\begin{cases} x_1-\frac{4}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=-1 \\ x_2-\frac{4}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=-3 \end{cases}$.

Ответ: 2 ур.-я; система ↑.

Д/З: Привести пример СЛАУ с общим решением $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Какое наименьшее число уравнений может иметь такая система?