Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

Занятие 1

§1 Проверка решений дифф. ур-ий. Составление дифф. ур-ий

№ 2706.

Выяснить, является ли решением данного дифф. ур-я $(x+y)dx + xdy = 0$ указанное семейство функций
$$y = \frac{c^2 - x^2}{2x}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Решение.

1) Найдём dy.

$$dy = y'(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2 - x^2}{x}\right)' dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x)\cdot x - (c^2 - x^2)\cdot 1}{x^2} dx =$$
$$= \frac{-2x^2 - c^2 + x^2}{2x^2} dx = \frac{-x^2 - c^2}{2x^2} dx$$

2) Подставим y и dy в дифф. ур-е:

$$\left(\overset{2x}{\cancel{x}} + \frac{c^2 - x^2}{2x}\right) dx + \cancel{x} \cdot \frac{-x^2 - c^2}{2x^{\cancel{2}}} dx = 0$$

$$\frac{2x^2 + c^2 - x^2}{2x} dx - \frac{x^2 + c^2}{2x} dx = 0$$

$\boxed{\text{ДЗ I №2708}}$

$$\frac{x^2 + c^2}{2x} dx - \frac{x^2 + c^2}{2x} dx = 0 \quad \text{верно}$$

След., является.

№2719.

Составить дифф. ур-е заданного семейства кривых: $x^3=c(x^2-y^2)$, $c\in\mathbb{R}$. (1)

Решение.

1) Продифференцируем исходное ур-е (1). Считаем, что $y=y(x)$.

$$3x^2=c(2x-2y\cdot y') \qquad (2)$$

2) Рас. систему ур-ий

$$\begin{cases}(1) & \mid\cdot 3\\ (2)\end{cases}$$

Исключим из нее постоянную c:

$$\begin{cases}3x^2\cdot x=3c(x^2-y^2) & (3)\\ 3x^2=c(2x-2y\cdot y') & (4)\end{cases}$$

Подставим (4) в (3):

$$c(2x-2yy')x=3c(x^2-y^2) \quad \mid : c$$

$$(2x-2yy')x=3(x^2-y^2)$$

Упростим:

$$2x^2-2xyy'=3x^2-3y^2$$

$$3y^2-x^2=2xyy'$$

Можно ур-е оставить, напр., в таком виде.

$$\boxed{\text{Д/З II №2720}}$$

§2 Геометрическое решение ОДУ 1 порядка методом изоклин.

Полем направлений дифф. ур-я $y' = f(x,y)$ наз. совокупность направлений таких, что $tg\alpha = f(x,y)$.

Изоклинами наз. кривые $f(x,y) = k$, в их точках наклон поле имеет постоянное значение $tg\alpha = k$.

Интегральные кривые — это кривые, кот. явл. решением дифф. ур-я. В каждой своей точке они касаются поле направлений, имеющегося в этой точке.

№2737.

Методом изоклин построить поле интегральных кривых для дифф. ур-я

$$y' = x^2 + y^2.$$

Решение.

1) Построим изоклины, их ур-я

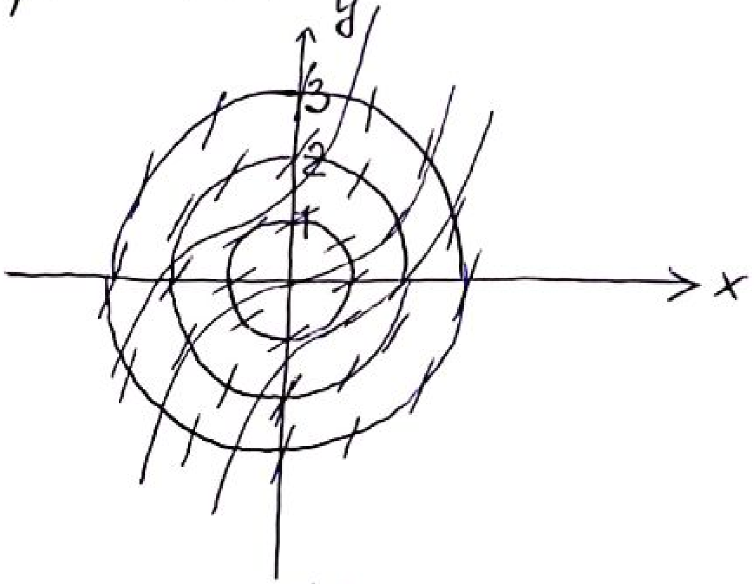
$$x^2 + y^2 = k.$$

Это окружности радиусов $R = \sqrt{k}$ с центрами $(0,0)$.

2) В точках каждой окружности проведём отрезки, образующие с Ox один и тот же угол α, где $tg\alpha = k$ (т.е. $\alpha = arctg k$)

k	1	4	9
r	1	2	3
α	$\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arctg} 4$	$\operatorname{arctg} 9$

3) Проведем интегр. кривые, касающиеся поля направлений.



№4.

Решить методом изоклин $y' = \left(y - \frac{x}{4}\right)^2$

Решение.

1) $\left(y - \frac{x}{4}\right)^2 = k$

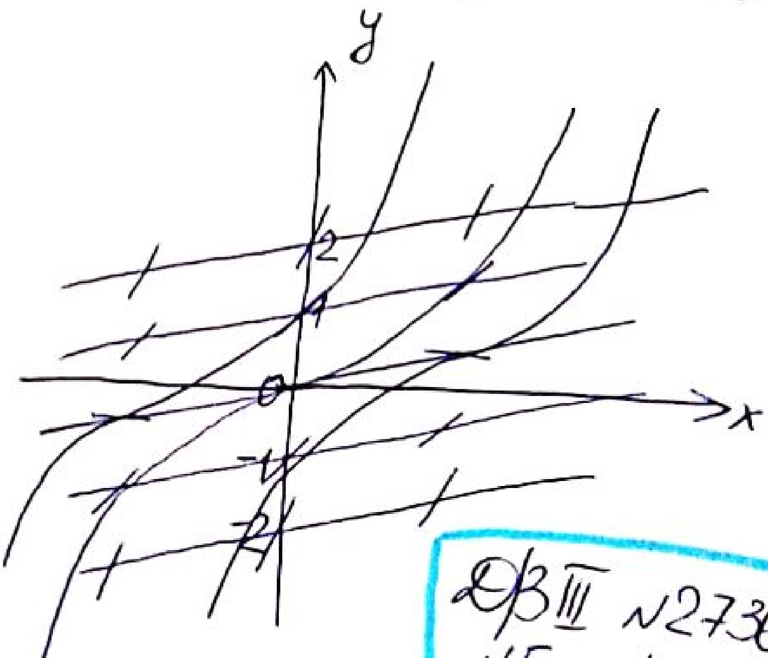
$y - \frac{x}{4} = \pm\sqrt{k}$

$y = \frac{x}{4} \pm \sqrt{k}$

$k = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$

$k = 1 \Rightarrow y = \frac{x}{4} \pm 1$

$k = 4 \Rightarrow y = \frac{x}{4} \pm 2$



2) Отрезки 3) Интегр. кривые

ДЗ III №2736;
№5. $y' = -\sqrt{y - 2x}$
решить методом изоклин

§3 Дифф. уравнения 1 пор. с разделяющимися переменными.

Опр. Дифф. ур. 1-го пор. с раздел. перем. — это уравнение вида

$$y' = f(x)\cdot g(x) \quad \text{или} \quad X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0.$$

План решения

Перепишем так:

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$	$X(x)Y(y)dx = -X_1(x)Y_1(y)dy$
1сл. $g(y) \neq 0$	1сл. $Y(y)X_1(x) \neq 0$

Разделим на

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$	$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx = -\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy$

Мы разделили переменные (x и y — с разных сторон от знака „=")

Интегрируем:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$	$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx = -\int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy$

Вычисляя интегралы, найдём общий интеграл дифф. ур-я

2сл. $g(y) = 0$	2сл. $\left[\begin{array}{l} Y(y) = 0 \\ X_1(x) = 0 \end{array}\right.$
Найдём такие $y = y_0$. Они тоже могут явл. решениями. (проверить!)	Найдём такие $\left[\begin{array}{l} y = y_1 \\ x = x_1 \end{array}\right.$ Они тоже могут явл. решениями (проверить!)

Надо проверить (также), можно ли включить их в общ. реш.

№ 2742

Решить уравнение:

$$\underbrace{tg\,x}_{X(x)} \cdot \underbrace{\sin^2 y}_{Y(y)}\,dx + \underbrace{\cos^2 x}_{X_1(x)}\,\underbrace{ctg\,y}_{Y_1(y)}\,dy = 0.$$

Это ур-е с разделяющимися перем.

Решение. 1 сл. $\sin^2 y \neq 0$, $\cos^2 x \neq 0$

$$tg\,x \sin^2 y\,dx = -\cos^2 x\,ctg\,y\,dy \quad / : \sin^2 y \cos^2 x$$

$$\frac{tg\,x}{\cos^2 x}\,dx = -\frac{ctg\,y}{\sin^2 y}\,dy$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{tg\,x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{ctg\,y}{\sin^2 y}\,dy$$

$$\int tg\,x\,d\,tg\,x = \int ctg\,y\,d\,ctg\,y$$

$$\frac{tg^2 x}{2} = \frac{ctg^2 y}{2} + C \quad / \cdot 2$$

$$tg^2 x = ctg^2 y + \underbrace{2C}_{\text{переобозн. через } C}$$

$$tg^2 x = ctg^2 y + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 сл. $\sin^2 y = 0$ $\cos^2 x = 0$

Решения этих ур-ий не явл. решением дифф. ур-я, т.к. не входят в его ОДЗ (ур-е содержит $tg\,x$ и $ctg\,y$)

Ответ: $tg^2 x = ctg^2 y + C$, $C \in \mathbb{R}$
(это общий интеграл ур-е)

№2744

$xy \cdot y' = 1 - x^2$

Решение

$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \quad | \cdot dx$ (при умн. на dx ур-е может приобрести лишн. решения $x = const$)

$xy\,dy = (1 - x^2)\,dx$ Это ур-е с раздел. перем.

Сл.1 $x \neq 0$

$xy\,dy = (1 - x^2)\,dx \quad | : x$

$y\,dy = \frac{1 - x^2}{x}\,dx$

$\int y\,dy = \int \frac{1 - x^2}{x}\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Зам. Сл.1 и Сл.2 можно не расписывать, сразу заметив при делении, решение или нет то, на что мы делим.

Сл.2 $x = 0$ не явл. реш. исходного дифф. ур-я. Это можно проверить подстановкой: $0 \cdot y \cdot y' = 1 - 0^2$

$0 = 1$ неверно

Ответ: $\boxed{\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}}$

Зам. Общий интеграл (общее решение) можно записать по-другому.

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \ln|x| + C \quad | \cdot 2$

$x^2 + y^2 = \ln x^2 + C$. Рас. др. константу C_1: $C = \ln C_1, C_1 > 0$.

$x^2 + y^2 = \ln x^2 + \ln C_1$

$x^2 + y^2 = \ln(x^2 C_1), \quad C_1 > 0$ к Ответ:

№2746

$$\underbrace{3e^x}_{X(x)}\underbrace{\operatorname{tg}y}_{Y(y)}dx+\underbrace{(1-e^x)}_{X_1(x)}\underbrace{\sec^2 y}_{Y_1(y)}dy=0$$

Это ур-е с раздел. переменными.

Решение.

$$3e^x\operatorname{tg}y\,dx=(e^x-1)\frac{1}{\cos^2 y}dy$$

1сл. $\operatorname{tg}y\neq0$, $e^x-1\neq0$

Разделим ур-е на $\operatorname{tg}y(e^x-1)$:

$$3\frac{e^x}{e^x-1}dx=\frac{1}{\operatorname{tg}y\cdot\cos^2 y}dy$$

Интегрируем:

$$3\int\frac{e^x}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{\operatorname{tg}y\cos^2 y}dy$$

$$3\int\frac{d(e^x-1)}{e^x-1}=\int\frac{d\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}y}$$

$3\ln|e^x-1|=\ln|\operatorname{tg}y|+C$, $C\in\mathbb{R}$; рас. $C_1>0$: $C=\ln C_1$

$\ln|e^x-1|^3=\ln|\operatorname{tg}y|C_1$, $C_1>0$

$|e^x-1|^3=|\operatorname{tg}y|C_1$, $C_1>0$

Снимем модули:

$\boxed{(e^x-1)^3=\operatorname{tg}y\cdot C_1}$, $C_1\neq0$ (C_1 уже может принимать любое значение кроме $C_1=0$)

2сл. 1) $\operatorname{tg}y=0\Rightarrow y=\pi n$ яв. решением исходного ур-е

2) $e^x-1=0\Rightarrow x=0$ яв. решением. Его можно включить в общ. интеграл при $C_1=0$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l}(e^x-1)^3=\operatorname{tg}y\cdot C_1,\ C_1\in\mathbb{R}\\ y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Scanned by CamScanner

Зам. Если при интегрировании написать константу C с другой стороны, то получим

$$3\ln|e^x-1|+C=\ln|\operatorname{tg} y|\quad, C\in\mathbb{R}$$

$$\ln|e^x-1|^3+\ln C_1=\ln|\operatorname{tg} y|\quad, C_1>0$$

$$\ln|e^x-1|^3C_1=\ln|\operatorname{tg} y|$$

$$|e^x-1|^3C_1=|\operatorname{tg} y|$$

$$(e^x-1)^3C_1=\operatorname{tg} y\quad, C_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Сл. 1) $\operatorname{tg} y=0 \Rightarrow y=\pi n$ яв. решением. Его можно включить в общ. интеграл при $C_1=0$

2) $e^x-1=0\Rightarrow x=0$ яв. решением

Ответ: $\left[\begin{array}{l}(e^x-1)^3C_1=\operatorname{tg} y, \; C_1\in\mathbb{R}\\ x=0\end{array}\right.$

Сравните два ответа!

№ 2748.

Найти частное решение, удовл. начальным условиям

$$(1+e^x)y\cdot y' = e^x \quad ; \quad y=1 \text{ при } x=0$$

Это задача Коши

Решение.

1) $(1+e^x)y\cdot\frac{dy}{dx} = e^x$

$(1+e^x)y\,dy = e^x dx$ $\quad | : (1+e^x) > 0$ всегда, поэтому мы не потеряем решение при делении ур-я на выражение с перем.

$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Это ур-е с раздел. перем.

$\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + C, \; C\in R$

$y^2 = \ln(1+e^x)^2 + \underline{2C}$

переобозн. через $\ln C_1, C_1>0$

$y^2 = \ln(1+e^x)^2 + \ln C_1$

$y^2 = \ln((1+e^x)^2\cdot C_1), \; C_1>0$

2) Решим задачу Коши. Выберем только то решение, которое удовл. н. у. (т.е. начальному условию $y(0)=1$:

$1^2 = \ln((1+e^0)^2 C_1)$

$1 = \ln 4C_1$

$4C_1 = e$

$C_1 = \frac{e}{4}$

Подст. в общ. решение:

$y^2 = \ln((1+e^x)^2\frac{e}{4})$

или перепишем так:

$e^{y^2} = (1+e^x)^2\cdot\frac{e}{4}$

Ответ: $4e^{y^2} = (1+e^x)^2\cdot e$

№2750. (это другая формулировка задачи как предыдущая)

Решить задачу Коши

$y' \sin x = y \cdot \ln y$; н.у. (нач. условие): $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$

Решение. 1) Решим ур-е

$$\frac{dy}{dx}\cdot \sin x = y\ln y$$

$$dy \sin x = y\cdot \ln y \, dx$$

1сл. $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \ln y \neq 0 \end{cases}$

$$\sin x\, dy = y\ln y\, dx \quad | \sin x \cdot y \cdot \ln y$$

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{d\ln y}{\ln y} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$= \ln C_1, \ C_1 > 0$

$$\ln|\ln y| = \ln\left(\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| C_1\right)$$

$$|\ln y| = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot C_1}$$

2сл. $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n \text{ не яв. реш. (проверяем подстановкой в исходное ур.)} \\ y = 0 \notin \text{ОДЗ ур-я} \Rightarrow \text{не яв. реш.} \\ \ln y = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{яв. решением;} \end{array}\right.$

его можно включить в общ. решение, считая $C_1 \in \mathbb{R}$ (при $C_1 = 0$ получ. $y=0$)

След, общее решение:

$$y = e^{C_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

2) Решим задачу Коши

Выясним, при каких C_1 решение удовл. н.у. Для этого подставим н.у. в общее решение:

$$1 = e^{C_1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$$

$$1 = e^{C_1 \cdot 1}$$

$$1 = e^{C_1}$$

$$C_1 = 0$$

Подставим обратно $C_1 = 0$ в общее реш, получим $y = e^{0 \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \Rightarrow y = 1$ — частное реш

Ответ: $y = 1$.

$\boxed{\text{ДЗ IV № 2743, 2745, 2747}}$

§4 Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка.

Опр. Однородн. дифф. ур. 1 пор — это уравнение вида

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,

где P, Q – однородные ф-ции одной и той же степени.

> Опр Функция $z = f(x,y)$ наз. однородной степени k, если $\forall \lambda$ $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$

План решения.

1) Нов. перем. $t = \frac{y}{x}$.

$\Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$

2) Подст. y и dy в исходное ур-е, получим ур-е с раздел. перем. относит. t, x.

№2770.

$$\underbrace{(x-y)y}_{xy-y^2}dx - x^2dy = 0$$

$xy - y^2 \leftarrow$ однородн. ф-ции степени 2.

$\Downarrow$

это однородн. ур-е 1 пор.

Решение.

$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$

Подст. y и dy в исходное ур-е:

$(x - tx)txdx - x^2(xdt + tdx) = 0$

Упростим.

$(x-tx)tx\,dx - x^3dt - x^2t\,dx = 0$

$(\cancel{x^2t} - x^2t^2 - \cancel{x^2t})dx - x^3dt = 0$

$-x^2t^2dx - x^3dt = 0$

$x^2t^2dx + x^3dt = 0$

Это ур-е с раздел. перем.:

<u>1с1.</u> $\begin{cases} t \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x^2t^2dx + x^3dt = 0. \quad / : t^2x^3$

$\frac{x^2}{x^3}dx + \frac{1}{t^2}dt$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t^2}$

$\ln|x| = \frac{1}{t} + C^{\ln C_1} \Rightarrow \frac{|x|}{C_1} = e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow |x| = C_1e^{\frac{1}{t}}, C_1 > 0$

$x = C_1e^{\frac{1}{t}}, C_1 \neq 0$

<u>2с1</u> $\left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \text{решение} \\ x = 0 \Rightarrow \text{решение, можно включить в общее решение при } C_1 = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ x = C_1e^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$

2) Вернёмся к старым переменным

$\left[\begin{array}{l} \frac{y}{x} = 0 \\ x = C_1e^{\frac{x}{y}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = C_1e^{\frac{x}{y}} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = C_1e^{\frac{x}{y}} \end{array}\right., C_1 \in \mathbb{R}.$

№2772.

$$y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$$

однородные функции степени 1

$\Downarrow$

это однородное уравнение 1 пор.

Решение.

$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = x\,dt + t\,dx$

Подставим y и dy в исходное ур-е:

$$tx\,dx + (2\sqrt{x\cdot tx} - x)(x\,dt + t\,dx) = 0$$

Приведём подобные слагаемые:

$$(tx + (2\sqrt{x^2t} - x)t)\,dx + (2\sqrt{x^2t} - x)x\,dt = 0$$

$$t(x + 2|x|\sqrt{t} - x)\,dx + (2|x|\sqrt{t} - x)x\,dt = 0$$

$$2t\sqrt{t}\,|x|\,dx = x(x - 2|x|\sqrt{t})\,dt$$

I сл. $x = 0$ решение (проверяем подстановкой)
(и решение исходного уравнения)

II сл. $x \neq 0$

При $x > 0$

$$2t\sqrt{t}\,x\,dx = x(x - 2x\sqrt{t})\,dt$$

$$2t\sqrt{t}\,x\,dx = x^2(1 - 2\sqrt{t})\,dt$$

При $x < 0$

$$-2t\sqrt{t}\,x\,dx = x(x + 2x\sqrt{t})\,dt$$

$$-2t\sqrt{t}\,x\,dx = x^2(1 + 2\sqrt{t})\,dt$$

Разделим на x^2:

$$\frac{2t\sqrt{t}\,dx}{x} = (1 - 2\sqrt{t})\,dt \qquad \Big| \qquad \frac{-2t\sqrt{t}\,dx}{x} = (1 + 2\sqrt{t})\,dt$$

Сл. 1. $t \neq 0$

Разделим на $t\sqrt{t}$:

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{1 - 2\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}\,dt \qquad \Big| \qquad -\frac{2\,dx}{x} = \frac{1 + 2\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}\,dt$$

это ур-е с разделяющ. перем.

Интегрируем:

$2\int\frac{dx}{x}=\int\left(t^{-\frac{3}{2}}-\frac{2}{t}\right)dt$	$-2\int\frac{dx}{x}=\int\left(t^{-\frac{3}{2}}+\frac{2}{t}\right)dt$
$2\ln\lvert x\rvert=-\frac{2}{\sqrt{t}}-2\ln\lvert t\rvert+C$	$-2\ln\lvert x\rvert=-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\ln\lvert t\rvert+C$

где $C\in\mathbb{R}$

Обозн. $C=2C_1$, где $C_1\in\mathbb{R}$

$2\ln\lvert x\rvert\lvert t\rvert=-\frac{2}{\sqrt{t}}+2C_1$	$-2\ln\lvert x\rvert\lvert t\rvert=-\frac{2}{\sqrt{t}}+2C_1$

Разделим на 2 и вернёмся к перем. y:

$\ln\lvert x\rvert\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert=-\sqrt{\frac{x}{y}}+C_1$	$-\ln\lvert x\rvert\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert=-\sqrt{\frac{x}{y}}+C_1$
$\ln\lvert y\rvert+\sqrt{\frac{x}{y}}=C_1$	$-\ln\lvert y\rvert+\sqrt{\frac{x}{y}}=C_1$
$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C_1$	$\sqrt{\frac{x}{y}}-\ln(-y)=C_1$

(В исходное дифф. ур-е входит $\sqrt{xy}\Rightarrow$
$\Rightarrow x$ и y имеют одинаковые знаки)

<u>Сл. 2</u> $t=0$ решение

$\Downarrow$

$y=0$ решение (проверьте подстановкой в исх. ур-е)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=C_1 \text{ при } x>0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}}-\ln(-y)=C_1 \text{ при } x<0 \\ \text{где } C_1\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

№2775

Найти частное решение уравнения

$$(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$$

из условия, что $y=1$ при $x=2$.

Решение.

1) Уравнение однородное.

Замена: $t=\frac{y}{x} \Rightarrow y=tx \Rightarrow dy=xdt+tdx$

Подставим y и dy в ур-е:

$$(x^2-3(tx)^2)\underline{dx}+2x\cdot tx(x\underline{\underline{dt}}+t\underline{dx})=0$$

Приведём подобные слагаемые:

$$x^2(1-3t^2+2t^2)dx+2x^3t\,dt=0$$

$$x^2(1-t^2)dx+2x^3t\,dt=0$$

Ур-е с раздел. переменными.

<u>1сл.</u> $\begin{cases} x\neq 0 \\ t\neq \pm 1 \end{cases}$

$$x^2(1-t^2)dx+2x^3t\,dt=0 \quad \Big/ : x^3(1-t^2)$$

$$\frac{1}{x}dx+2\frac{t}{1-t^2}dt=0$$

$$\frac{dx}{x}=2\frac{t\,dt}{t^2-1}$$

$$\int\frac{dx}{x}=2\int\frac{t\,dt}{t^2-1}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}$$

$\ln|x| = \ln|t^2-1| + C$, где $C \in \mathbb{R}$

|| представим в таком виде

$\ln C_1$, где $C_1 > 0$

$|x| = |t^2-1| C_1$

$x = (t^2-1)C_1$, $C_1 \neq 0$

Вернёмся к y:

$x = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)C_1$

$x^3 = (y^2 - x^2)C_1$, $C_1 \neq 0$.

2сл. $x=0$ решение (провер. подстановкой)
Его можно включить в решение, разрешив C_1 принимать значение 0.

$t = \pm 1$ решение (провер. подстановкой).

$\Rightarrow y = \pm x$

След, решение исходного дифф. ур-я

$$\left[\begin{array}{ll} x^3 = (y^2-x^2)C_1, \ C_1 \in \mathbb{R} & (1) \\ y = \pm x . & (2) \end{array}\right.$$

2) Решим задачу Коши: н.у. $y(2) = 1$
Решение (2) не удовл. этому н.у.
Подставим $x=2, y=1$ в решение (1):

$8 = (1-4)C_1$

$C_1 = -\frac{8}{3}$

Подставим $C_1 = -\frac{8}{3}$ обратно в (1):

$$x^3 = (y^2 - x^2)\left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$3x^3 = 8(x^2 - y^2)$$

$$8y^2 = 8x^2 - 3x^3$$

$$y^2 = x^2\left(1 - \frac{3}{8}x\right)$$

$$y = \pm x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$$

Т.к. получили 2 решение со знаками $\pm$, то пров., какое же из них удовл. н.у. Подставляя $x=2, y=1$, видим, что знак $-$ не подходит.

Ответ: $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.

$\boxed{\text{Д/З V. № 2769, 2771, 2773}}$

№2848

$$(x^2y - x^2 + y - 1)\,dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0$$

Преобразуем:

$$\left(x^2(y-1) + (y-1)\right)dx + \left(x(y+2) - 3(y+2)\right)dy = 0$$

$$(x^2+1)(y-1)\,dx + (x-3)(y+2)\,dy = 0$$

Это ур-е с раздел. переменными.
Решаем как обычно. ...

№2852.

$$2\,dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = 0$$

Преобразуем:

$$\left(2 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy = 0$$

однородн. ф-ции степени 0.

Это ур-е однородное 1 порядка
Решаем как обычно: $t = \frac{y}{x}$ ...

$\boxed{\text{Д/З } \underline{\overline{\text{VI}}} \quad № 2873, 2834, 2840, 2857, 2874.}$