Занятие 2

§5. Линейное дифф. уравнение 1 пор.

Опр. Линейным дифф. уравнением 1 пор наз. ур-е вида
$$y' + P(x)y = Q(x)$$
Линейным однородным дифф. ур-ем 1 пор. наз. ур-е вида
$$y' + P(x)y = 0.$$

Зам. $\exists$ 2 вида однородности для дифф. ур-ий

по переменным x, y	по правой части (она $=0$)
Это пред. §4 прошл. семинара	Это нынешний §5.

План решения:

1) Решить однородное ур-е:
$$y' + P(x)y = 0$$
Оно явл. ур-ем с раздел. перем.
В общем виде его решение запис. так:
$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}, \text{ где } C \in \mathbb{R}$$

2) Решить неоднородное ур-е.
Метод вариации постоянной (это метод Лагранжа)
Считаем $C = C(x)$ функцией от x.
Подставим $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$ в исходное ур-е, найдём $C(x)$. Ответом общим будет
$$y = C(x) e^{-\int P(x)dx}$$

№2785.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

Зам. Линейные ур-я 1 пор. можно также решать методом Бернулли (см. с. 9, 10)

Решение. Перепишем ур-е так:

$$y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{x}_{Q(x)}$$

Значит, наше ур-е явл. линейным 1-го пор. Решаем его по плану.

1) Решим однородное ур-е: (без т.е. правой части)

$$y' - \frac{1}{x} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad | \cdot dx, \ : y$$

<u>1 сл.</u> $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

<u>2 сл.</u> $y = 0$ явл. решением (однор. ур-я)

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Обозн. $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$\ln|y| = \ln(|x| C_1)$$

$$|y| = |x| C_1$$

$y = x C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. так можно считать после отбрас. модулей

Включим в него $y = 0$, допуская $C_1 = 0$.

Итак, решение однор. ур-е: $\boxed{y = xC_1}$ $\boxed{\text{где } C_1 \in \mathbb{R}}$

2) Решим неоднородное ур-е (исходное) методом вариации постоянной (метод Лагранжа)

Считаем $C_1 = C_1(x)$.

Подставим решение $y = x\,C_1(x)$ в исходное ур-е:

$$\left(x C_1(x)\right)' - \frac{1}{x}\cdot\left(x\cdot C_1(x)\right) = x$$

$$x' C_1(x) + x\, C_1'(x) - C_1(x) = x$$

$$\cancel{C_1(x)} + x\, C_1'(x) - \cancel{C_1(x)} = x$$

$$x\, C_1'(x) = x \quad \Big| : x \ (\neq 0)$$

(т.к. $x=0$ не явл. реш. исходного ур-е)

$$C_1'(x) = 1$$

$$C_1(x) = x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

След., общее решение: $y = x(x + C_2)$, где $C_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Зам.</u> Константы можно переобозначать на „старые" буквы: $y = x(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$.

№2789.

Найти решение ур-е $xy'+y-e^x=0$, удовлетворяющее условию $y=b$ при $x=a$.

Решение.

Преобразуем ур-е:

$$xy'+y-e^x=0 \quad \Big| : x \neq 0$$ (т.к. $x=0$ не явл. решением ур-я)

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$$

Это лин. ур-е 1 порядка.

1) Решим уравнение.

1) Решим однор. ур-е:

$$y'+\frac{1}{x}y=0$$

<u>1 сл.</u>

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \quad \Big| :y,\ \cdot dx$$

<u>2 сл.</u> $y=0$ явл. решением однор. ур-я

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln C_1, \quad C_1>0$$

$$\ln|y|=\ln\frac{C_1}{|x|}$$

$$|y|=\frac{C_1}{|x|}$$

$$y=\frac{C_1}{x}, \quad C_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Включим $y=0$ (из сл. 2) в решение из сл. 1, получим $y=\frac{C_1}{x}$, $C_1\in\mathbb{R}$.

2) Решим неоднор. ур-е методом вариации постоянной (методом Лагранжа)

Пусть $C_1 = C_1(x)$.

Подставим $y = \frac{C_1(x)}{x}$ в исходное ур-е:

$$\left(\frac{C_1(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x}\left(\frac{C_1(x)}{x}\right) = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{C_1'(x)\cdot x - C_1(x)\cdot x'}{x^2} + \frac{C_1(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{C_1'(x)\cdot x - \cancel{C_1(x)\cdot 1} + \cancel{C_1(x)}}{x^2} = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{C_1'(x)\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{e^x}{x}$$

$$\frac{C_1'(x)}{x} = \frac{e^x}{x} \qquad |\cdot x$$

$$C_1'(x) = e^x$$

$$\frac{dC_1}{dx} = e^x$$

$$dC_1 = e^x dx$$

$$\int dC_1 = \int e^x dx$$

$$C_1(x) = e^x + C_2, \text{ где } C_2 \in \mathbb{R}$$

След., общее решение: $y = \frac{e^x + C_2}{x}$

② Решим задачу Коши.
Начальное условие: $y=b$ при $x=a$.
Подставим его в общее решение, чтобы найти C_2:

$$b=\frac{e^a+C_2}{a}$$

$$ab=e^a+C_2 \Rightarrow C_2=ab-e^a$$

Подставим найденное C_2 в общее решение, получим искомое частное решение:

$$y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}.$$

Ответ: $y=\dfrac{e^x+ab-e^a}{x}$

№2791.

Решить задачу Коши:

$$\underbrace{y' - y\,tg x}_{P(x)} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{Q(x)} \quad ; \quad y(0)=0.$$

Это линейное ур-е 1 порядка

Решение

1 Решим уравнение.

1) Решим однородное уравнение:

$$y' - y\,tg x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,tg x$$

1сл. $y \neq 0$.

2сл. $y=0$ явл. решением однородн. ур-я

$$\frac{dy}{dx} = y\,tg x \;\; |:y$$

$$\frac{dy}{y} = tg x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \underbrace{\ln C_1}_{\text{это } C}, \text{ где } C_1 > 0$$

$$\ln(|y||\cos x|) = \ln C_1$$

$$|y\cos x| = C_1$$

$y\cos x = C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y = \frac{C_1}{\cos x}$, где $C_1 \in \mathbb{R}$ (мы включили решение $y=0$)

2) Решим неоднородное ур-е методом вариации постоянной (методом Лагранжа)

$$y = \frac{C_1(x)}{\cos x}$$

Подставим в исходное ур-е:

$$\left(\frac{C_1(x)}{\cos x}\right)' - \frac{C_1(x)}{\cos x}\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{C_1'\cos x + \cancel{C_1 \sin x}}{\cos^2 x} - \frac{\cancel{C_1 \sin x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{C_1'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \qquad | \cdot \cos x$$

$$C_1' = 1$$

$$C_1 = x + C_2$$

След., общее решение: $y = \dfrac{x + C_2}{\cos x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$

(2) Задача Коши: н.у. $y=0$ при $x=0$.
Подставим в общее решение:

$$0 = \frac{0 + C_2}{\cos 0} \Rightarrow C_2 = 0$$

Подст. C_2 в общее решение и получим искомое частное решение:

$$y = \frac{x}{\cos x}$$

ДЗ I.
№ 2786, 2790

Ответ: $y = \dfrac{x}{\cos x}$

Scanned by CamScanner

Уравнение Бернулли

Опр. Уравнением Бернулли наз. ур-е вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$.

Планы решения

II способ (Метод Лагранжа)

Замена: $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}$$

Разделим ур-е на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{P(x)}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\, y^{1-\alpha} = Q(x)$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x) z = Q(x) \qquad \big|\cdot(1-\alpha)$$

$$z' + (1-\alpha)P(x) z = (1-\alpha)Q(x)$$

Это линейное ур-е 1 пор. отн. перем. z. Решаем как обычно, потом возвращ. к y.

I способ (Метод Бернулли).

Ищем решение ур-е Бернулли в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Подставим y и y' в уравнение Бернулли и запишем его как линейное относительно v.

Функции u и v найдём из условий:

$$\begin{cases} \text{„коэфф-т при } v \text{ равен нулю"} \\ \text{„оставшееся ур-е".} \end{cases}$$

Рас. на примерах.

Зам. Методом Бернулли можно также решать линейное ур-е 1 порядка!

№2793.

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$$

Преобразуем уравнение:

$$2xyy' - y^2 + x = 0 \quad / : 2xy$$ (чтобы коэфф-т при y' равнялся 1)

$$y' - \frac{y^{\cancel{2}}}{2x\cancel{y}} + \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}y} = 0$$

($x=0$ и $y=0$ не явл. решением ур-е).

$$y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2y}$$

$$y' - \frac{1}{2x}\cdot y = -\frac{1}{2}y^{-1}$$ Это ур-е Бернулли.

I способ. Метод Бернулли.

1) Ищем решение в виде $y = uv$

$$\Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Подставим в ур-е (y и y'):

$$u'v + uv' - \frac{1}{2x}\cdot uv = -\frac{1}{2}\frac{1}{uv}$$

Запишем это ур-е как линейное отн. v и v':

$$uv' + \underbrace{\left(u' - \frac{1}{2x}u\right)}_{\text{коэфф-т при } v} v = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{uv}$$

Найдём u и v из условий

$$\begin{cases} u' - \frac{1}{2x}u = 0 & (1) \leftarrow \text{„коэф-т при } v \text{ равен 0"} \\ uv' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{uv} & (2) \leftarrow \text{„оставшееся ур-е"} \end{cases}$$

2) Рас. (1):

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{2x} \quad \Big| : u,\ \cdot dx$$

<u>1сл.</u> $u \neq 0$

<u>2сл.</u> $u=0$ явл. решением ур-я (1)

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x| + C, \text{ где } C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|u| = \ln\sqrt{|x|} + \ln C_1, \text{ где } C_1 > 0$$

$$\ln|u| = \ln\left(\sqrt{|x|}\,C_1\right)$$

$$|u| = \sqrt{|x|}\,C_1$$

$$u = \sqrt{|x|}\,C_1, \text{ где } C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Включая в это решение $u=0$ из 2сл., получим $u=\sqrt{|x|}\,C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

3) Подставим в (2)

$$C_1\sqrt{|x|}\cdot v' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x|}\,C_1 v} \quad \Big| : C_1\sqrt{|x|}$$

($x=0$ не явл. реш. исх. ур-е; и в этом ур-ии $C_1 \neq 0$)

$$v' = -\frac{1}{2C_1^2|x|v}$$

$\boxed{\text{Рас. случай } x>0}$.

$$v' = -\frac{1}{2C_1^2 x v}$$

Это ур-е с раздел. переменными

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2C_1^2 x v} \quad \Big| \cdot 2C_1^2 v\, dx$$

$$2C_1^2 v\, dv = -\frac{dx}{x}$$

$$2C_1^2 \int v\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$C_1^2 v^2 = -\ln x + \underset{\text{"}\ln C_3\text{"}}{C_2}, \quad C_3>0$$

$$C_1^2 v^2 = \ln\frac{C_3}{x}$$

$$v^2 = \frac{1}{C_1^2}\ln\frac{C_3}{x}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{C_1^2}\ln\frac{C_3}{x}} = \pm\frac{1}{|C_1|}\sqrt{\ln\frac{C_3}{x}}$$

4) Найдём y.

След, $y = uv = \pm\sqrt{x}\, C_1 \frac{1}{|C_1|}\sqrt{\ln\frac{C_3}{x}}$

Удобно дать ~~ответ~~ в виде общего интеграла: $y^2 = x\cdot\ln\frac{C_3}{x}$, где $C_3>0$.

$\boxed{\text{Случай } x<0}$ разбирается аналогично (не будем).

Ответ (для $x>0$): $y^2 = x\ln\frac{C_3}{x}$, $C_3>0$.

$\underline{\text{II}}$ способ. (Метод Лагранжа).

$$y' - \frac{1}{2x} \cdot y = -\frac{1}{2} y^{-1} \quad | : y^{-1}$$

$$\frac{y'}{y^{-1}} - \frac{1}{2x} \frac{y}{y^{-1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y'}{y^{-1}} - \frac{1}{2x} y^2 = -\frac{1}{2}$$

Замена: $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy' \Rightarrow \frac{y'}{y^{-1}} = \frac{z'}{2}$

Подставим в ур-е:

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{2x} \cdot z = -\frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -1$$

Это линейное ур-е 1-го порядка.

1) Решим одноp. ур-е

$$z' - \frac{1}{x} z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$\underline{1 сл.}$ $z \neq 0$ $\qquad$ $\underline{2 сл.}$ $z = 0$ решение

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \qquad C, C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

$$|z| = |x| C_1$$

$$z = x C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Уч. 1 и 2 сл.

$\Downarrow$

$z = x C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R}$

2) Решим неоднородное ур-е методом вариации постоянной (это и есть метод Лагранжа):

$$z = C_1(x)x.$$

$$\Downarrow$$

$$z' = C_1'x + C_1 \cdot x' = C_1'x + C_1$$

Подставим z и z' в неоднор. ур-е:

$$C_1'x + C_1 - \frac{1}{\cancel{x}} C_1 \cancel{x} = -1$$

$$C_1'x + \cancel{C_1} - \cancel{C_1} = -1$$

$$C_1'x = -1 \qquad |:x \ (\neq 0, \text{ т.к. } x=0 \text{ не явл. решением})$$

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$dC_1 = -\frac{dx}{x}$$

$$\int dC_1 = -\int \frac{dx}{x}$$

$$C_1 = -\ln|x| + C_2 \quad (= \ln C_3, \ C_3 > 0)$$

$$C_1 = \ln \frac{C_3}{|x|}$$

След., $z = x \cdot \ln \frac{C_3}{|x|}$

Вернёмся к переменной y:

$$y^2 = x \ln \frac{C_3}{|x|} \leftarrow \text{Ответ:}$$

Зам. Как правило методом Бернулли решать легче. Исключения редкие.

№2794.

$y\,dx + (x - \frac{1}{2}x^3y)\,dy = 0$

Это уравнение можно сделать линейным 1 порядка относит. ф-ции $x(y)$.

Разделим его на dy:

$$y \cdot \frac{dx}{dy} + (x - \frac{1}{2}x^3y) = 0$$

$$y \cdot x' + x = \frac{1}{2}y \cdot x^3 \quad |:y \ (\neq 0, \text{ т.к } y=0 \text{ не явл. решением})$$

$$x' + \frac{1}{y}x = \frac{1}{2}x^3$$

Это лин. ур-е 1 пор. относит. $x(y)$.

I сп. Метод Бернулли.

Ищем решение в виде

$$x = u \cdot v \Rightarrow x' = u'v + uv'.$$

Подставим в ур-е:

$$u'v + uv' + \frac{1}{y} \cdot uv = \frac{1}{2}(uv)^3$$

Приведём подобн. слагаемые отн. v:

$$uv' + (u' + \frac{1}{y}u)v = \frac{1}{2}(uv)^3.$$

Ищем u и v из системы ур-ий:

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{y}u = 0 & (1) \\ uv' = \frac{1}{2}u^3v^3 & (2) \end{cases}$$

1) Решим (1):

$$\frac{du}{dy} = -\frac{u}{y} \quad |:u \neq 0$$

Сл. 1

Сл. 2 $u = 0$ явл. реш. одноp. ур-е.

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{du}{u} = -\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = -\ln|y| + \ln C$$

$$|u| = \frac{C}{|y|}$$

$$u = \frac{C}{y} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

2) подставим в (2):

$$\frac{C}{y} v' = \frac{1}{2}\frac{C^3}{y^3} v^3 \qquad |:C \ , \ \cdot 2y$$

$$2v' = \frac{C^2}{y^2} \cdot v^3$$

$$2\frac{dv}{dy} = \frac{C^2}{y^2} v^3 \qquad |: v^3 \ , \ \cdot dy$$

$\neq 0$ сл.1. сл.2 $v=0$ решение (но тогда $y=0$, а $y=0$ не явл. решением исх. ур-я $\Rightarrow$ $\Rightarrow v=0$ учит. не будем)

$$2\frac{dv}{v^3} = C^2\frac{dy}{y^2}$$

$$2\int v^{-3}dv = C^2\int y^{-2}dy$$

$$2\frac{v^{-2}}{-2} = C^2\frac{y^{-1}}{-1} + C_1$$

$$-\frac{1}{v^2} = -\frac{C^2}{y} + C_1$$

$$v^2 = \frac{-1}{C_1 - \frac{C^2}{y}} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\frac{C^2}{y} - C_1}$$

3) Найдём $x = uv$.

Вместо x найдём y^2:

$$x^2 = u^2 v^2$$

$$\boxed{x^2} = \frac{C^2}{y^2} \cdot \frac{1}{\frac{C^2}{y} - C_1} =$$

$$= \frac{C^2 \cdot \cancel{y}}{y^{\cancel{2}}(C^2 - C_1 y)} = \frac{C^2}{y(C^2 - C_1 y)} =$$

$$= \frac{\cancel{C^2}}{\cancel{C^2}\left(y - \frac{C_1}{C^2} y^2\right)} = \boxed{\frac{1}{y + C_2 y^2}}$$ Это ответ.

обозн. C_2

II сп. Метод Лагранжа

$$x' + \frac{1}{y} x = \frac{1}{2} x^3 \quad \Big| : x^3$$

$$\frac{x'}{x^3} + \frac{1}{y} x^{-2} = \frac{1}{2}$$

Замена: $z = x^{-2} \Rightarrow z' = -2x^{-3}x' = -2 \cdot \frac{x'}{x^3}$

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{z'}{-2}$$

Подставим в ур-е:

$$\frac{z'}{-2} + \frac{1}{y} z = \frac{1}{2} \quad \Big| (-2)$$

$$z' - \frac{2}{y} z = -1$$

Это линейное ур-е 1 пор.

1) Решим однородное ур-е:

$$z' - \frac{2}{y} z = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2z}{y}$$

1сл. $z \neq 0$ 2сл. $z = 0$ яв. реш.

$$\frac{dz}{z} = 2\frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln C$$

$$|z| = y^2 C$$

$$z = Cy^2$$

След, $z = Cy^2$, $C \in \mathbb{R}$

2) Решим неоднородное ур-е методом вариации постоянных:

$$z = C(y) \cdot y^2$$

$$\Downarrow$$

$$z' = C' \cdot y^2 + C \cdot 2y.$$

Подставим в неоднор. ур-е:

$$C'y^2 + \cancel{C \cdot 2y} - \cancel{\frac{2}{y} Cy^2} = -1$$

$$C'y^2 = -1 \quad \Big| : y^2 (\neq 0)$$

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

$$dC = -\frac{dy}{y^2}$$

$$\int dC = -\int \frac{dy}{y^2}$$

$$C = \frac{1}{y} + C_1,$$

где $C_1 \in \mathbb{R}$

3) $z=\left(\frac{1}{y}+C_1\right)y^2$

Вернёмся к переменной x:

$x^{-2}=\left(\frac{1}{y}+C_1\right)y^2$

$\frac{1}{x^2}=y+C_1y^2$

$x^2=\frac{1}{y+C_1y^2}$. (тот же ответ).

$\boxed{\text{Д13 II № 2792, 2795.}}$

$\boxed{\text{Д13 III № 2844, 2856}}$

к этим номерам.

№ 2847.

$y'(x\cos y+a\sin 2y)=1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+a\sin 2y}$

$\frac{dx}{dy}=x\cos y+a\sin 2y$

$x'-\cos y\cdot x=a\sin 2y$

Это линейное ур-е 1 порядка отн. переменной x.

...

№2850.

$$xy^3dx = (x^2y+2)dy$$

$$xy^3 \cdot \frac{dx}{dy} = x^2y + 2 \qquad | : xy^3$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y+2}{xy^3}$$

$$x' = \frac{1}{y^2}x + \frac{2}{y^3}x^{-1}$$

$$x' - \frac{1}{y^2}x = \frac{2}{y^3}x^{-1}$$ Это ур-е Бернулли относит. перем. x

...

№ 2854.

$$yy' + y^2 = \cos x \qquad | : y$$

$$y' + y = \cos x \cdot y^{-1}$$ Это ур-е Бернулли относит. y.

...

Эти ур-е можно дорешать до конца, но один из важнейших этапов решения – распознать тип уравнения.