Занятие 3.

Обыкновенные дифф. уравнения высших порядков. ОДУ, допускающие понижение порядка.

Рас. несколько типов уравнений.

I. $y^{(n)}=f(x)$.

Это ур-е не содержит производных $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

1 сп.

1) Замена: $y^{(n-1)}=p(x)$.
Ур-е примет вид $p'=f(x)$. Решаем, находим $p(x)$.

2) Аналог. решаем ур-е
$y^{(n-1)}=f(x)$.

2 сп.

"Непосредственное интегрирование".

Перепишем ур-е:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=f(x)$$

$$dy^{(n-1)}=f(x)dx \leftarrow \text{Переменные разделились}$$

Интегрируем обе части, находим $y^{(n-1)}$.
Дальше по аналогии.

II. 1) $F(x,y',y'')=0$
Не содержит y.

2) $F(y,y',y'')=0$
Не содержит x.

Замена: $y' = p(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow y'' = p'$	Замена: $y' = p(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$

Получим ур-е:

$F(x, p, p') = 0$	$F(y, p, p') = 0$

Мы понизили порядок ур-е.

Найдём $p(x)$.	Найдём $p(y)$.

Найдём $y(x)$ из ур-е

$y' = p(x)$	$y' = p(y)$
$\frac{dy}{dx} = p(x)$	$\frac{dy}{dx} = p(y)$
$dy = p(x)dx$	$\frac{dy}{p(y)} = dx$

$\boxed{\text{Зам. Пров. решение } p(y) = 0 \text{ !}}$

Это ур-е с раздел. переменными, решаем их.

№2911.

$y'' = \frac{1}{x}$. Это ур-е типа I.

Решение.

II сп. Непосредств. инт-е.	I сп. Замена: $y' = p(x)$. Подставим в ур-е: $p' = \frac{1}{x}$.
$(y')' = \frac{1}{x}$	$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x}$
$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{x}$	$dp = \frac{dx}{x}$
$dy' = \frac{dx}{x}$	$\int dp = \int \frac{dx}{x}$
$\int dy' = \int \frac{dx}{x}$	$p = \ln\|x\| + C,\ C \in R$
$y' = \ln\|x\| + C,\ C \in R$	

$y' = \ln(|x|C_1)$, где $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$ | $p = \ln|x|C_1$, ...

Вернёмся к y:

$y' = \ln|x|C_1$

Дальше аналогичное решение:

$$y' = \ln(xC_1),\ C_1 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln(xC_1)$$

$$dy = \ln(C_1x)dx$$

$$\int dy = \underbrace{\int \ln(C_1x)dx}_{\text{„по частям"}}$$

$$y = \ln(C_1x)\cdot x - \int x\, d(\ln C_1x)$$

$$y = \ln(C_1x)\cdot x - \int \cancel{x}\frac{\cancel{C_1}}{\cancel{C_1x}}dx$$

$$y = x\ln(C_1x) - x + C_2$$

Ответ: $y = x\ln(C_1x) - x + C_2$, $C_1 \neq 0$, C_2 – любое

Зам. Это решение можно преобразовать к виду

$y = x\ln|x| + C_3x + C_2$, ← так в ответе

используя св-ва $\ln$.

$\boxed{\text{ДЗ I. N1: } y^{(4)} = 5}$

№ 2926.

$$xy''' + y'' = 1 + x$$

Решение

Уравнение не содержит y и y'.

(1) Пусть $y'' = p(x) \Rightarrow y''' = p'(x)$.

Подставим в ур-е:

$xp' + p = 1 + x \quad | : x \neq 0$ (т.к. $x=0$ не явл. реш.)

$$p' + \frac{1}{x}p = \frac{1+x}{x}$$

Это лин. ур-е 1 пор.

(2) Решим ур-е, напр., методом Лагранжа.

1) Решим однор. ур-е:

$$p' + \frac{1}{x}p = 0$$

$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x} \quad | : p \neq 0$ (т.к. $p=0$ не явл. решением неодн. ур-е)

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x}$$

$\ln|p| = -\ln|x| + C$, $C = \ln C_1$, $C_1 > 0$, $C \in \mathbb{R}$

$$\ln|p| = \ln\frac{C_1}{|x|}$$

$$|p| = \frac{C_1}{|x|}$$

$p = \frac{C_1}{x}$, $C_1 \neq 0$

2) Решим неодн. ур-е. Считаем $p = \frac{C_1(x)}{x}$.

Подст. в неодн. ур.:

$$\frac{C_1'(x) \cdot x - C_1(x) \cdot \underbrace{x'}_{=1}}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C_1(x)}{x} = \frac{1+x}{x};$$

$$C_1' = 1 + x$$

$$\frac{dC_1}{dx} = 1 + x$$

$dC_1 = (1+x)dx$; $\int dC_1 = \int (1+x)dx$; $C_1 = x + \frac{x^2}{2} + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$

След., $p(x)=\dfrac{\frac{x^2}{2}+x+C_2}{x}=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{C_2}{x}$

③ Вернёмся к y. Т.к. $y''=p$, то

$$y''=\frac{x}{2}+1+\frac{C_2}{x}.$$

Это ур-е I типа (см. начало этого занятия)

Решим непосредств. интегрированием.

$$(y')'=\frac{x}{2}+1+\frac{C_2}{x}$$

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{x}{2}+1+\frac{C_2}{x}$$

$$dy'=\left(\frac{x}{2}+1+\frac{C_2}{x}\right)dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{x}{2}+1+\frac{C_2}{x}\right)dx$$

$$y'=\frac{x^2}{4}+x+C_2\ln|x|+C_3\ ,\quad C_3\in\mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{4}+x+C_2\ln|x|+C_3$$

$$dy=\left(\frac{x^2}{4}+x+C_2\ln|x|+C_3\right)dx$$

Интегрируя, получим:

$$y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_3x+C_2\underbrace{\int\ln|x|\,dx}_{\text{„по частям"}}$$

....

$$y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_3x+C_2(x\ln|x|-x)+C_4\ ,\quad C_4\in\mathbb{R}$$

$$y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_5x+C_2x\ln|x|+C_4$$ (обозн. $C_5=C_3-C_2$)

Ответ: ↑ , $C_2, C_5, C_4\in\mathbb{R}$.

№2945.

$2y'+(y'^2-6x)\cdot y''=0$ Найти решение, удовлетворяющее нач. усл. $y'(2)=2$.

Решение.

Уравнение не содержит y.

1) Пусть $y'=p(x) \Rightarrow y''=p'(x)$.

Подставим в ур-е:

$$2p+(p^2-6x)p'=0$$

$$2p+(p^2-6x)\frac{dp}{dx}=0 \quad |\cdot dx$$

$$2p\,dx+(p^2-6x)\,dp=0 \quad |:dp \ (\overset{1\text{сл.}}{\neq 0}, \text{т.е. } p\neq const)$$

$$2p\cdot x'+(p^2-6x)=0$$

$$2p\,x'-6x=-p^2$$

$$x'-\frac{3}{p}x=-\frac{p}{2}$$

Это линейное ур-е 1 пор. относительно x.
Мы разделили на $2p$.
(сейчас не рас. $p=const$)

2) Решим методом Бернулли.

Ищем решение в виде

$$x=uv \Rightarrow x'=u'v+uv'.$$

Подставим в ур-е:

$$u'v+uv'-\frac{3}{p}uv=-\frac{p}{2}$$

$$uv'+\left(u'-\frac{3}{p}u\right)v=-\frac{p}{2} \qquad (0)$$

Ищем u и v из системы ур-ий:

$$\begin{cases} u'-\frac{3}{p}u=0 & (1)\\ uv'=-\frac{p}{2} & (2)\end{cases}$$

Решим (1): $\frac{du}{dp} = \frac{3u}{p}$ $\quad | : u \neq 0$ (сл. А)

сл. Б: $u=0$ явл. решением однор. ур-я (но не явл. решением исходного ур-я (0))

$$\frac{du}{u} = 3\frac{dp}{p}$$

$$\int\frac{du}{u} = 3\int\frac{dp}{p}$$

$$\ln|u| = 3\ln|p| + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|u| = \ln|p|^3 + \ln C_1 , \ C_1 > 0$$

$$\ln|u| = \ln|p|^3 C_1$$

$$|u| = |p|^3 C_1$$

$$u = p^3 C_1 \quad , C_1 \neq 0$$

Подставим в (2):

$$p^3 C_1 \cdot v' = -\frac{p}{2} \qquad | : p^3$$

$$C_1 \frac{dv}{dp} = -\frac{1}{2p^2}$$

$$C_1 dv = -\frac{1}{2}\frac{dp}{p^2}$$

$$C_1\int dv = -\frac{1}{2}\int\frac{dp}{p^2}$$

$$C_1 v = \frac{1}{2}\frac{1}{p} + C_2 \qquad | : C_1 \quad ; C_2 \in \mathbb{R}$$

$$v = \frac{1}{2C_1 p} + \frac{C_2}{C_1}$$

Найдём $x = uv = p^3 C_1 \cdot \left(\frac{1}{2C_1 p} + \frac{C_2}{C_1}\right) =$

$$= \frac{1}{2}p^2 + C_2 p^3$$

3 Вернёмся к y. Т.к. $p(x) = y'$, то

$$x = \frac{1}{2}(y')^2 + C_2 (y')^3. \qquad (3)$$

Мы понизили степень ур-я!
Это ур-е 1-й степени, а уравнение в условии задачи — 2-й степени.

4 Важно: в задаче не требуется найти общее решение! Надо только найти решение, удовл. нач. условием (Задача Коши).

$y'(2) = 2$ ← нач. условие.
Подставим $x = 2$, $y' = 2$ в (3) и найдём C_2:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + C_2 \cdot 2^3$$

$$C_2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Подставим $C_2 = 0$ опять в решение (3):

$$x = \frac{1}{2}(y')^2.$$

Именно решение этого ур-я нам надо найти. Решим его:

$$y'^2 = 2x$$

$$y' = \pm\sqrt{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}\sqrt{x}$$

$$dy = \pm\sqrt{2}\sqrt{x}\,dx$$

$$\int d\,y = \pm\sqrt{2}\int \sqrt{x}\,dx$$

$$y = \pm\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_3$$

$$\boxed{y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_3}$$

Знак (−) не подходит по нач. условием!

2сл. $p = const$.

След., $y' = const$, $y'' = 0$.

Такое решение удовл. ур-ю и условия только при $const = 0$, т.е. $y' = 0$. Но такое решение не удовл. н.у. $y'(2) = 2$. Поэтому мы его находить не будем.

Ответ: $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_3$, $C_3 \in \mathbb{R}$.

№2938.

$xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$. Найти решение, удовл. указанным условиям $y(1) = 0$, $y(e^2) = 1$.

Решение.

Уравнение не содержит y.

(1) Пусть $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$.

Подст. в ур-е:

$xp' = \sqrt{1 + p^2}$ ← Это ур-е с раздел. переменными. Решим его.

(2) $x \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|p + \sqrt{p^2 + 1}| = \underbrace{\ln|x| + \overset{\ln C_1,\ C_1 > 0}{\overset{\shortparallel}{C}}}_{\ln|x|C_1}$$

$$|p + \sqrt{p^2 + 1}| = |x| C_1$$

$$p + \sqrt{p^2 + 1} = x C_1, \quad C_1 \neq 0$$

$$\sqrt{p^2+1} = C_1 x - p$$

$$\begin{cases} \cancel{p^2}+1 = (C_1 x)^2 - 2C_1 p x + \cancel{p^2} \\ C_1 x - p \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2C_1 p x = C_1^2 x^2 - 1$$

③ Вернёмся к y: т.к. $p = y'$, то

$2C_1 y' x = C_1^2 x^2 - 1$ Это ур-е с разд. перем.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1^2 x^2 - 1}{2C_1 x}$$

$$dy = \left(\frac{1}{2} C_1 x - \frac{1}{2C_1} \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{2} C_1 x - \frac{1}{2C_1} \frac{1}{x}\right) dx$$

$$y = \frac{C_1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2C_1} \ln|x| + C_2$$

$y = \dfrac{C_1 x^2}{4} - \dfrac{1}{2C_1} \ln|x| + C_2$ Это общее решение исходного ур-я. В пред. номере мы не стали получать общее решение (т.к. трудно), а сразу перешли к задаче Коши.

④ В общем решении у нас две постоянных. Найдём их из двух данных нач. условий.

$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{C_1}{4} - \dfrac{1}{2C_1} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow \dfrac{C_1}{4} + C_2 = 0$

$y(e^2) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{C_1 e^4}{4} - \dfrac{1}{2C_1} \ln e^2 + C_2 \Rightarrow \dfrac{C_1 e^4}{4} - \dfrac{1}{C_1} + C_2 = 0$

Получим систему ур-ий относит. C_1 и C_2.

Из системы найдём (решив квадр. ур-е отн. C_1):

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{2}{e^2-1} \\ C_2 = \dfrac{1}{2(1-e^2)} \end{cases}; \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{-2}{e^2+1} \\ C_2 = \dfrac{1}{2(e^2+1)} \end{cases}$$

$\Downarrow$ после упрощений $\Downarrow$

$$y = \frac{x^2-1}{2(e^2-1)} + \frac{1-e^2}{4}\ln|x|; \quad y = \frac{1-x^2}{2(e^2+1)} + \frac{e^2+1}{4}\ln|x|$$

Ответ: $\nwarrow$; $\nearrow$.

$\boxed{\text{Д/З II № 2919, 2923, 2940, 2953.}}$

Scanned by CamScanner

№2921.

$yy'' - y'(1+y') = 0$

Решение.

Уравнение не содержит x.

① Пусть $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y)\cdot y' = p'p$.

Подставим в ур-е:

$y \cdot p'p - p(1+p) = 0 \;\; \Big| : \overset{\text{сл.1}}{p \neq 0}$

сл.2 $p = 0 \Rightarrow y = const$ явл. решением

$yp' = p+1$ Это ур-е с раздел. перем.

② Решим его

$y\dfrac{dp}{dy} = p+1$

сл. А $y \neq 0$, $p \neq -1$

сл. Б
$\left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ решение } (y=const) \\ p = -1 \Rightarrow y = -x + C \text{ решение} \end{array}\right.$

$\dfrac{dp}{p+1} = \dfrac{dy}{y}$

$\displaystyle\int \frac{dp}{p+1} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|p+1| = \ln|y| + C,\; C \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{обозн.}}{=} \ln C_1,\; C_1 > 0$

$\ln|p+1| = \ln|y|C_1$

$p+1 = yC_1,\; C_1 \neq 0$

$p = C_1 y - 1$

③ Вернёмся к y.

$y' = p \Rightarrow y' = C_1 y - 1$

$\dfrac{dy}{dx} = C_1 y - 1 \;\; \Big| : \overset{\text{сл. а}}{C_1 y - 1 \neq 0}$

сл. б $y = \dfrac{1}{C_1}$ решение ($y = const$)

$\dfrac{dy}{C_1 y - 1} = dx$

$\displaystyle\int \frac{dy}{C_1 y - 1} = \int dx$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|y-\frac{1}{C_1}\right| = x + C_2 \qquad |\cdot C_1$$

$$\ln\left|y-\frac{1}{C_1}\right| = C_1x + C_1C_2$$

$$y-\frac{1}{C_1} = e^{C_1x+C_1C_2}$$

$$y = \frac{1}{C_1} + e^{C_1x}\underbrace{e^{C_1C_2}}_{\text{обозн. } C_3}, \quad C_3>0$$

$$y = C_3e^{C_1x} + \frac{1}{C_1}, \quad C_1\neq 0,\ C_3>0$$

Ответ
$$\left[\begin{array}{l} y = C_3e^{C_1x} + \frac{1}{C_1}, \quad C_1\neq 0,\ C_3>0. \\ y = const \end{array}\right.$$

№2935

$$yy''+y'^2-y'^3\ln y = 0$$

Решение.

Уравнение не содержит x.

(1) Пусть $y'=p(y) \Rightarrow y''=p'p$

Подставим в ур-е:

сл. 1

$$yp'p+p^2-p^3\ln y = 0 \quad |:yp\neq 0$$

$$p' + \frac{1}{y}p = p^2\frac{\ln y}{y}$$

Это уравнение Бернулли

сл. 2

1) $y=0$ не входит в ОДЗ ур-я $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ не явл. решением

2) $p=0 \Rightarrow y'=0$

$y=const$ явл. реш. (но $const>0$)

(2) Решим получ. ур-е. Разделим его на p^2: $\frac{p'}{p^2}+\frac{1}{y}\frac{1}{p} = \frac{\ln y}{y}$

Замена $z=\frac{1}{p} \Rightarrow z' = -\frac{1}{p^2}\cdot p' = -\frac{p'}{p^2}$

Подставим в ур-е:

$$-z' + \frac{1}{y} z = \frac{\ln y}{y}$$

$$z' - \frac{1}{y}\cdot z = -\frac{\ln y}{y}$$ Это лин. ур-е 1 пор.

Решим методом Бернулли.

Ищем решение в виде: $z = uv \Rightarrow$ (зависят от y)

$$\Rightarrow z' = u'v + uv'.$$

Подст. в ур-е:

$$u'\underline{v} + uv' - \frac{1}{y} u\underline{v} = -\frac{\ln y}{y}$$

$$uv' + \left(u' - \frac{1}{y}u\right)v = -\frac{\ln y}{y}$$

Ищем u и v из системы ур-ий

$$\begin{cases} u' - \frac{1}{y}u = 0 & (1) \\ uv' = -\frac{\ln y}{y} & (2) \end{cases}$$

Решим (1): $\frac{du}{dy} = \frac{u}{y}$ $\quad |:u \neq 0$ $\left(u=0 \Rightarrow z=0 \text{ не явл. реш., т.к. } z = \frac{1}{p} \right)$

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = \ln|y| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$|u| = |y| C_1$$

$$u = y C_1, \quad C_1 \neq 0$$

Подст. в (2):

$$yC_1 \cdot v' = -\frac{\ln y}{y}$$

$$C_1 \frac{dv}{dy} = -\frac{\ln y}{y^2}$$

$$C_1 dv = -\ln y \, \frac{dy}{y^2}$$

$$C_1\int dv = -\int \ln y \frac{dy}{y^2}$$

$$C_1 v = \underbrace{-\int \ln\frac{1}{y}\, d\left(\frac{1}{y}\right)}_{\text{„по частям"}}$$

$$\| $$

$$-\left[\ln\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y} - \int \frac{1}{y}\, d\ln\frac{1}{y}\right] =$$

$$= -\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y} + \int \cancel{\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{\cancel{\frac{1}{y}}}\, d\frac{1}{y} =$$

$$= -\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y} + \frac{1}{y} + C_2 \quad , C_2 \in \mathbb{R}$$

$$v = -\frac{1}{C_1 y}\ln\frac{1}{y} + \frac{1}{C_1 y} + \frac{C_2}{C_1} = \frac{\ln y}{C_1 y} + \frac{1}{C_1 y} + \frac{C_2}{C_1}$$

Найдем $z = uv =$

$$= y C_1 \cdot \left(\frac{\ln y}{C_1 y} + \frac{1}{C_1 y} + \frac{C_2}{C_1}\right) = \ln y + 1 + C_2 y$$

③ Вернёмся к y:

$$z = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln y + C_2 y + 1}$$

$$y' = p \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln y + C_2 y + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln y + C_2 y + 1}$$

$$dx = (\ln y + C_2 y + 1)\, dy$$

$$\int dx = \int(\ln y + C_2 y + 1)\, dy$$

$$x = \underbrace{\int \ln y\, dy}_{\text{по частям}} + C_2\cdot\frac{y^2}{2} + y + C_3,$$

$$x = y\ln y \cancel{-y} + C_2\cdot\frac{y^2}{2} \cancel{+y} + C_3;$$

C_4

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} x = y\ln y + C_4 y^2 + C_3, \\ C_3, C_4 \in \mathbb{R}; \\ y = C_5,\ C_5 > 0. \end{array}\right.$$

№2943.

$y^2+y'^2-2y\cdot y''=0$. Найти решение, удовл. нач. усл. $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение. Уравнение не содержит x.

① Пусть $y'=p(y) \Rightarrow y''=p'(y)\cdot y'=p'\cdot p$

Подст. в ур-е:

$y^2+p^2-2yp'p=0$

$2yp\cdot p'=y^2+p^2$ Это однородное ур-е

$2yp\cdot\frac{dp}{dy}=y^2+p^2$

$\underbrace{2yp}\,dp=\underbrace{(y^2+p^2)}\,dy$

однор. ф-ции 2 степ.

Пусть $t=\frac{p}{y} \Rightarrow p=ty \Rightarrow dp=ydt+tdy$.

Подст. в ур-е:

$2ty\cdot y(ydt+tdy)=((ty)^2+y^2)\,dy$

1сл.

$2ty^2(ydt+tdy)=y^2(t^2+1)dy \;|: y\neq 0$

$2t(ydt+tdy)=(t^2+1)dy$

$2tydt=(1-t^2)dy$ Это ур-е с раздел. переменными.

2сл. $y=0$ решение не удовл. н. усл.

$\frac{2tdt}{1-t^2}=\frac{dy}{y}$

$-\int\frac{d(1-t^2)}{1-t^2}=\int\frac{dy}{y}$

$-\ln|1-t^2|+C=\ln|y|$, $C\in\mathbb{R}$; введём C_1: $C=\ln C_1$

$\ln\frac{C_1}{|1-t^2|}=\ln|y|$

$$\frac{C_1}{|1-t^2|} = |y|$$

$$C_2 = (1-t^2)\cdot y \quad , C_2 \neq 0$$

Вернёмся к p:

$$C_2 = \left(1 - \left(\frac{p}{y}\right)^2\right) y$$

$$C_2 = \frac{y^2 - p^2}{y^2} \cdot y$$

$$C_2 = \frac{y^2 - p^2}{y}$$

$$C_2 y = y^2 - p^2$$

$$p^2 = y^2 - C_2 y$$

Вернёмся к y':

$$(y')^2 = y^2 - C_2 y$$

Не будем решать до конца. Найдём только те решения, кот. удовл. н.у.

Пусть $x=0 \Rightarrow y=1, y'=1$.

Подставим в последнее ур-е:

$$1^2 = 1^2 - C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y'^2 = y^2 \Rightarrow y' = \pm y$$

Пусть $x=0 \Rightarrow 1 = \pm 1$

След., выбираем знак $\oplus$:

$y' = y$. Решим это ур-е:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln|y| = x + C_3$$

$$|y| = e^{x + C_3}$$

$$y = \pm e^{C_3} e^{x}$$

$$y = C_4 e^{x}, \quad C_4 \neq 0$$

Пусть $x=0 \Rightarrow$ $1 = C_4 \cdot e^{0}$

$$C_4 = 1$$

След., $y = e^{x}$ – искомое частное решение.

Ответ: $y = e^{x}$.

№2949.

$y'' = y'^2 - y$ Найти решение, удовл. н.у.
$y'(1) = \frac{1}{2}$.

Решение

Ур-е не содержит x.

Пусть $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p' \cdot p$.

Подст. в ур-е:

$p' \cdot p = p^2 - y \quad | : p$

$p' - p = -y \cdot \frac{1}{p}$ Это Бернулли ур-е.

Замена $z = p^2$.

и т.д. Ответ: $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$.

№2950.

$y'' + \frac{1}{y^2} \cdot e^{y^2} \cdot y' - 2y \cdot y'^2 = 0$. Найти решение, удовл. н.у. $y\left(-\frac{1}{2e}\right) = 1$, $y'\left(-\frac{1}{2e}\right) = e$.

Решение.

Ур-е не содержит x.

Пусть $y' = p \Rightarrow y'' = p' \cdot p$.

Подст. в ур-е:

$p'p + \frac{1}{y^2} e^{y^2} \cdot p - 2y \cdot p^2 = 0 \quad | : p \neq 0$

($p = 0 \Rightarrow y' = 0$ не удовл. н.у.)

$p' + \frac{1}{y^2} \cdot e^{y^2} - 2yp = 0$

$p' - 2yp = -\frac{e^{y^2}}{y^2}$ Это линейное ур-е 1пор.

и т.д. Ответ: $y = -\frac{1}{2} e^{-y^2}$.

№2951.

$1+yy''+y'^2=0$ Найти решение, удовл. усл.
$y(1)=0$, $y'(1)=1$.

Решение. Ур-е не содержит x.

Замена: $y'=p(y) \Rightarrow y''=p'\cdot p$

Подст. в ур-е:

$$1+y\cdot p'\cdot p+p^2=0 \quad /:yp$$

$$p'+\frac{1}{y}\cdot p=-\frac{1}{y}\cdot p^{-1}$$

Это ур-е Бернулли.

и т.д. Ответ: Решения нет.
(т.е. общее решение не может удовл. н.у.)

Д/З III №2918, 2927, 2941, 2947, 2952.

На следующем занятии
(на 4-м по дифф. ур-ям)
контрольная работа!