Занятие 5.

Интегрирование линейных однородных ОДУ высших порядков с постоянными коэф-ми. Фундамент. система решений.

Опр. Линейным однородным дифф. ур-ем n-го порядка наз. ур-е

$$y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y = 0, \quad (1)$$

где $P_i(x)$ – непрерывные функции.

Фундаментальной системой решений ур-я (1) наз. любой набор из n линейно независ. решений (ФСР).

Т-ма. 1) $\forall$ ур-я (1) $\exists$ ФСР

2) Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – ФСР ур-я (1). Тогда общее решение ур-я (1) имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x),$$

где $C_i \in \mathbb{R}$

Опр. Линейным однор. дифф. ур-ем n-го порядка с постоянными коэф-ми наз. ур-е:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0, \text{ где } a_i \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Характеристическим ур-ем ур-я (2)

нау. ур-е $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – его корни.

Рас. случаи.

I сл. Все корни действительные.

<u>1 сл.</u> Все корни некратные.

Тогда ФСР: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$.

<u>2 сл.</u> Среди корней хар. ур-я есть кратные.

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\substack{\text{кратн.} \\ k_1}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\substack{\text{кратн.} \\ k_2}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{\substack{\text{кратн.} \\ k_r}}, \text{ где } \sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

Тогда ФСР:

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ldots, y_{k_1} = x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$,

$y_{k_1+1} = e^{\lambda_2 x}, y_{k_1+2} = xe^{\lambda_2 x}, \ldots, y_{k_1+k_2} = x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$

и т.д.

II сл. Среди корней хар ур-я есть комплексное

<u>1 сл.</u> $\lambda = \alpha \pm i\beta$ некратный корень

(если λ корень, то $\bar{\lambda}$ тоже корень).

Тогда ФСР (соответств. этому корню λ):

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>2сл.</u> $\lambda = \alpha \pm i\beta$ корень кратности r.
Тогда ФСР (соотв. этому корню):

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$y_{r+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Частный случай</u>

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Хар. ур-е $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Возможны случаи:

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Тогда корни хар. ур-я:		
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
ФСР:		
$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Общее решение однор. ур-я:		
$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$	$y_{oo} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

№2976.

Решите однородное ур-е: $y''-5y'+6y=0$.

Решение.

Решим хар. ур-е $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$

некратные действит. корни.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{3x}$, $y_2=e^{2x}$

Общее решение: $y_{oo}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$.

Ответ. $y_{oo}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

№2983.

То же задание для ур-е $y''-4y'+2y=0$.

Решение.

Хар. ур-е : $\lambda^2-4\lambda+2=0$

$\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$

некратные действит. корни

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{(2+\sqrt{2})x}$, $y_2=e^{(2-\sqrt{2})x}$

Общее решение: $y_{oo}=C_1e^{(2+\sqrt{2})x}+C_2e^{(2-\sqrt{2})x}=$

$=e^{2x}(C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x})$.

Ответ: $y_{oo}=e^{2x}(C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x})$, $C_i\in\mathbb{R}$.

№2980

$$y''-2y'+2y=0$$

Решение. Хар. ур-е:

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

$$D_1 = 1-2=-1$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{1}=1\pm i \quad \left(\Rightarrow \alpha=1,\ \beta=1,\ \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i\right)$$

некратные компл. корни

$\Rightarrow$ ФСР $\quad y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^x\cos x$

$\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^x\sin x$

Общее решение: $y_{oo}=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x=$

$=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $C_i\in\mathbb{R}$.

Ответ: $y_{oo}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $C_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$.

ДЗ. №2981, 2982

№*.

$$y''-4y'+4y=0$$

Решение. Хар. ур-е: $\lambda^2-4\lambda+4=0$

$\lambda_{1,2}=2$

кратные действит. корни.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$.

Общее решение: $y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=$

$=e^{2x}(C_1+C_2x)$, $C_i\in\mathbb{R}$.

Ответ: $y_{oo}=e^{2x}(C_1+C_2x)$, $C_i\in\mathbb{R}$.

№2987.

Решить задачу Коши:

$y''-5y'+4y=0$; $y=5, y'=8$ при $x=0$.

Решение.

1) Найдём общее решение ур-я.

Хар. ур-е: $\lambda^2-5\lambda+4=0$

$\lambda_1=1, \lambda_2=4$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{1x}, y_2=e^{4x}$

Общ. реш. $y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{4x}$.

2) Решим задачу Коши.

Для этого найдём C_1, C_2 так, чтобы решение удовл. нач. условиям.

Подст. н.у. в общее решение:

$$5=C_1e^0+C_2\cdot e^{4\cdot 0} \Rightarrow 5=C_1+C_2$$

Найдём $y'_{oo}=C_1e^x+C_2\cdot 4\cdot e^{4x}$

Подст. н.у.:

$$8=C_1e^0+C_2\cdot 4\cdot e^{4\cdot 0} \Rightarrow 8=C_1+4C_2$$

Решим систему ур-ий:

$$\begin{cases} C_1+C_2=5 \\ C_1+4C_2=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=4 \\ C_2=1 \end{cases}$$

Получим частное решение однор. ур-я:

Ответ:

$y_{чо}=4e^x+e^{4x}$

№3045.

$y''' - 13y'' + 12y' = 0$.

Решение.

Хар. ур-е: $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 12) = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 12$

некратные действ. корни.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{12x}$

Общ. решение:

$y_{оо} = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x + C_3 \cdot e^{12x}$

Ответ: $y_{оо} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}$, $C_i \in R$

№3051.

$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$

Решение.

Хар. ур-е: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$

$(\lambda^2 + 4)^2 = 0$

$\lambda^2 = -4$ | $\lambda^2 = -4$

$\lambda = \pm 2i$ | $\lambda = \pm 2i$

Получим $\lambda_1 = 2i \overset{=0+2i}{}$ крат. 2,

$\lambda_2 = -2i \overset{=0-2i}{}$ крат. 2.

Каждой паре комплексно сопряженных корней соответств. 2 фундам. решения:

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{0\cdot x}\cos 2x = \cos 2x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{0\cdot x}\sin 2\cdot x = \sin 2x$

Т.к. корни кратн. 2, то есть ещё 2 реш.:

$y_3 = x y_1 = x\cos 2x$

$y_4 = x y_2 = x\sin 2x$.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = \cos 2x \quad y_2 = \sin 2x$

$y_3 = x\cos 2x \quad y_4 = x\sin 2x$

Общ. реш.:

$y_{oo} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x +$

$+ C_3 x\cos 2x + C_4 x\sin 2x =$

$= (C_1 + C_3 x)\cos 2x + (C_2 + C_4 x)\sin 2x$.

Ответ: $\uparrow$.

№3052.

$y^{(4)}+y'=0$

Решение. Хар. ур-е:

$\lambda^4+\lambda=0$

$\lambda(\lambda^3+1)=0$

См. пояснение на след. стр.

$\lambda_1=0$ $\quad\lambda^3=-1$

$\lambda_{2,3,4}=\sqrt[3]{-1}=\left[\begin{array}{l}-1\\ e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ e^{-\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$

Два различн. действит. корня и два различн. компл. сопряж. корня.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{0x}=1$

$y_2=e^{-1x}=e^{-x}$

$y_3=e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_4=e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Общее решение:

$y_{oo}=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$

$c_i\in\mathbb{R}$.

Ответ: ↑.

$\boxed{\text{ДЗ II. №3048, 3049.}}$

Напоминание

Формула корней n-й степени из комплексного числа.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,\dots,n-1$.

В частности, т.к.

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \sqrt[n]{-1} = \underset{\text{как из действ. числа}}{\sqrt[n]{1}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2},$$

$k=0,\dots,n-1$.

Пример.

Найдём $\sqrt[3]{-1}$.

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}, \text{ где } k=0,1,2.$$

при $k=0$ получим $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=1$ — " — $\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} =$

$= \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$k=2$ — " — $\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} =$

$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

№3057.

$$y^{(4)}+2y'''+y''=0$$

Решение.

Хар. ур-е: $\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2=0$

$$\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+1)=0$$

$$\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

$\lambda=0$ кратн. 2 $\qquad$ $\lambda=-1$ кратн. 2

два действит. корня кратности 2.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{0\cdot x}=1$ $\quad\mid\quad$ $y_3=e^{-1x}=e^{-x}$

$y_2=xe^{0x}=x\cdot 1=x$ $\quad\mid\quad$ $y_4=xe^{-x}$

Общее решение:

$$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}.$$ Ответ:

$C_i\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Д/З III №3055, 3056.}}$

Восстановление линейного однородного дифф. ур-я по фундам. системе решений.

Опр. Определитель Вронского для функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — это определитель:

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Св-ва. 1) Если $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ хотя бы в одной точке на отрезке $[a, b]$, то ф-ции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$.

2) Если $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ на $[a, b]$, то треб. дополнит. исслед.

3) Если $y_1, \dots, y_n$ лин. завис. на $[a, b]$, то $W[y_1, \dots, y_n] = 0$ на $[a, b]$.

№ 2968.

а) Исслед. ф-ции на лин. зависимость:

$y_1 = x$, $y_2 = x + 1$

Решение.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ лин. независ.

Зам. Лин. независ. можно док-ть по опр. (исп. лин. комбин.)

e) $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{3x}$

Решение.

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^x e^{2x} e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ лин. независ.

в) $y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = x$

Решение.

I способ.

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ треб. доп. исслед.

II способ. Исп. опр. лин. завис.

Составим линейную комбинацию, равную 0:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot x = 0$$

$\exists\, \lambda_i$, не все равные нулю, такие что лин. комб. равна 0. Это, напр., $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

След., y_1, y_2, y_3 лин. завис.

№2969.

Могут ли функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являться ФСР лин. однор. дифф. ур-е? Если да, то составить это ур-е.

Д/З $\overline{\text{IV}}$
№2968(б,г,д)
№2969(б)

а) $y_1(x)=\sin x \qquad y_2(x)=\cos x.$

Решение.

1) $y_1(x), y_2(x)$ лин. независ,

т.к. $W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq 0$

2) Составим дифф. ур-е.

Общ. решение этого ур-е:

$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2$, т.е. $y=C_1\sin x+C_2\cos x.$

Т.к. ф-ции $y(x), y_1(x), y_2(x)$ лин. зависимы (y выраж. через y_1, y_2), то $W[y,y_1,y_2]=0$. Составим $W[y,y_1,y_2]$:

$$W[y,y_1,y_2]=\begin{vmatrix}y & \sin x & \cos x\\ y' & \cos x & -\sin x\\ y'' & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=y\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}+y''\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=$$

$=-y-y''=0 \Rightarrow \boxed{y''+y=0.}$ Ответ;