Занятие 6.

Линейные неоднородные ур-я с постоянными коэффициентами и специальной правой частью выше 2 порядка

Часть 2

№3062

Решить уравнение $y''' - y = x^3 - 1$.

Решение.

(1) Решим однородное уравнение $y''' - y = 0$

Хар. ур-е: $\lambda^3 - 1 = 0$

$\lambda^3 = 1$

$\lambda = \sqrt[3]{1}$

$-1 = \cos(0 + 2\pi k) + i\sin(0 + 2\pi k)$

$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, где $k = 0, 1, 2$

При $k = 0 \Rightarrow \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 2 \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x}_{e^{\alpha x}\cos\beta x}$, $y_3 = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}_{e^{\alpha x}\sin\beta x}$

Общее решение однородного ур-я:

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

(2) Найдём частное решение неоднородн. ур-я.

Правая часть $f(x) = x^3 - 1$

$n = 3$, $a = 0$ не корень хар. ур-я

$\Rightarrow y_{чн} = e^{ax} R_3(x) = R_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Найдём A, B, C, D.

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B$$

$$y'''_{чн} = 6A$$

Подставим в исходное ур-е:

$$6A - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 1$$

$$\begin{cases} -A = 1 \\ -B = 0 \\ -C = 0 \\ 6A - D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 6A + 1 = 6(-1) + 1 = -5 \end{cases}$$

След., $y_{чн} = -x^3 - 5$.

(3) Общее решение неоднор. ур-я:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

$$y_{он} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - x^3 - 5.$$

Ответ: ↗.

№3063

$y^{(4)} + y''' = \cos 4x$

Решение

① Решим однородное ур-е: $y^{(4)} + y''' = 0$

Хар. ур-е: $\lambda^4 + \lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda+1) = 0$

$\lambda = 0$ кратности 3, $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$, $y_3 = x^2 e^{0x} = x^2$,

$y_4 = e^{-1\cdot x} = e^{-x}$

Общее решение однор. ур-е:

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}$.

② Найдём частное решение неоднор. ур-е:

$n = 0$, $m = 0 \Rightarrow N = 0$, $a = 0$, $b = 4$

$a + b_i = 4i$ – не корень хар. ур-е

$\Rightarrow y_{чн} = e^{ax}(S_0(x)\cos bx + T_0(x)\sin bx) =$

$= C_4 \cos 4x + C_5 \sin 4x$

Зам. Менее громоздко обозначать $C_4 = A$, $C_5 = B$.

Найдём C_4 и C_5.

$y'_{чн} = -4C_4 \sin 4x + 4C_5 \cos 4x$

$y''_{чн} = -16C_4 \cos 4x - 16C_5 \sin 4x$

$y'''_{чн} = 64C_4 \sin 4x - 64C_5 \cos 4x$

$y^{(4)}_{чн} = 256C_4 \cos 4x + 256C_5 \sin 4x$

Подставим в исходное ур-е:

$(256C_4 \cos 4x + 256C_5 \sin 4x) +$

$+ (64C_4 \sin 4x - 64C_5 \cos 4x) = \cos 4x$

$$\begin{cases} 256\,C_4 - 64\,C_5 = 1 \\ 256\,C_5 + 64\,C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = \frac{1}{272} \\ C_5 = -\frac{1}{1088} \end{cases}$$

След., $y_{чн} = \frac{1}{272}\cos 4x - \frac{1}{1088}\sin 4x$

③ Общее решение неодн. ур-я:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

$$y_{он} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{272}\cos 4x - \frac{1}{1088}\sin 4x$$

Ответ: ↗

№3064.

$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$

Решение

1) Решим однородн. ур-е $y''' + y'' = 0$.

Хар. ур-е: $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 0$ кратности 2, $\lambda = -1$.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$; $y_3 = e^{-x}$.

Общее решение однор. ур-е:

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$

2) Найдём частное решение неоднор. ур-е.

Правая часть: $f(x) = \underbrace{x^2 + 1}_{f_1(x)} + \underbrace{3xe^x}_{f_2(x)}$

Для прав. части $f_1(x) = x^2 + 1$

$n = 2$, $a = 0$ (т.к. нет e^{ax})

$a = 0$ — корень хар. ур-е кратности $r = 2$

$\Rightarrow y_{чн_1} = x^2 e^{0x}(\underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{R_2(x)}) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

Для прав. части $f_2(x) = 3xe^x$

$n = 1$, $a = 1$ — не корень хар. ур-е $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_2} = e^{1 \cdot x}(\underbrace{Dx + E}_{R_1(x)}) = e^x(Dx + E)$

След., $y_{чн} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + e^x(Dx + E)$.

Найдём A, B, C, D, E.

$$y'_{чн} = 4Ax^3+3Bx^2+2Cx+e^x(Dx+E)+e^xD$$

$$y''_{чн} = 12Ax^2+6Bx+2C+e^x(Dx+E)+e^xD+e^xD =$$

$$= 12Ax^2+6Bx+2C+e^x(Dx+E+2D)$$

$$y'''_{чн} = 24Ax+6B+e^x(Dx+E+2D)+e^x\cdot D =$$

$$= 24Ax+6B+e^x(Dx+E+3D).$$

Подставим в исходное ур-е:

$$24Ax+6B+e^x(Dx+E+3D)+$$

$$+12Ax^2+6Bx+2C+e^x(Dx+E+2D) = x^2+x+3xe^x$$

$$12Ax^2+6(4A+B)x+2(3B+C)+e^x(2Dx+2E+5D)=$$

$$= x^2+1+3xe^x.$$

Получим сис. ур-ий (ф-ции x^2, x, xe^x, e^x лин. незав.):

$$\begin{cases} 12A=1 \\ 6(4A+B)=0 \\ 2(3B+C)=1 \\ 2D=3 \\ 2E+5D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{3}{2} \\ D=\frac{3}{2} \\ E=-\frac{15}{4} \end{cases}$$

След., $y_{чн} = \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+e^x\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)$

(3) Общее решение неодн. ур-я:

$$y_{он} = C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+e^x\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)$$

Ответ: ↑.

№3067.

Найти частное решение ур-я

$y''' + 2y'' + 2y' + y = x$,

удовлетворяющее н.у. $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Решение.

(1) Решим однородное ур-е $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$

Хар. ур-е: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda^3 + 1) + 2\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) + 2\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$\lambda = -1$; решим $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3$; $\sqrt{D} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}_{\alpha \pm \beta i}$$

Все корни некратные.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y_3 = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Общее решение однородн. ур-я:

$$y_{oo} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x =$$

$$= c_1 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

(2) Найдём частное решение неоднор. ур-я.

Прав. часть $f(x) = x$. $(= P_1(x)e^{0x})$

$n = 1$, $a = 0$

$\Rightarrow y_{чн} = (Ax + B)e^{ax} = Ax + B$.

Найдём A и B.

$y'_{чн} = A$

$y''_{чн} = 0$

$y'''_{чн} = 0$ Подставим в исходное ур-е:

$0+2\cdot 0+2A+Ax+B = x$

Получим систему: $\begin{cases} A=1 \\ 2A+B=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$

След., $y_{чн} = x-2$.

(3) Общее решение неодн. ур-е:

$$y = C_1 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$

(4) Решим задачу Коши.
Для этого найдём C_1, C_2, C_3, подставив $x=0$ в $y(x), y'(x), y''(x)$.

$$y' = -C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 1$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{3}{4}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{4}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Подставим $x=0$:

$$\begin{cases} 1\cdot C_1 + 1(C_2\cdot 1 + C_3\cdot 0) + 0 - 2 = 0; \\ -C_1\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1(C_2\cdot 1 + C_3\cdot 0) + 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cdot 1\right) + 1 = 0; \\ C_1\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1(C_2\cdot 1 + C_3\cdot 0) - \frac{1}{2}\cdot 1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot C_2\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cdot 1\right) - \\ \quad - \frac{1}{2}\cdot 1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3\cdot 1\right) + \\ \quad + 1\left(-\frac{3}{4}C_2\cdot 1 - \frac{3}{4}C_3\cdot 0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ -C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + 1 = 0 \\ \frac{1}{4}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}C_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}C_3 - \frac{3}{4}C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

След., решением задачи Коши является

$$y = e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$

Ответ: ↑.

ДЗ III. №3060, 3061, 3065

ДЗ IV Подготовка к РК с. 2-3 № 4.1, 4.2, 4.3
с 3 №4 из вар 0.

Также см.! др. номера из подготовки к РК.