Занятие 6. Часть 1

Интегрирование линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэфф-ми и специальной правой частью

Опр. Линейным неоднородным дифф. ур-ем k-го порядка наз. ур-е

$$y^{(k)} + P_1(x)\cdot y^{(k-1)} + \ldots + P_k(x) y = f(x),$$

где $P_i(x)$, $f(x)$ - непр. ф-ции.

Рас. лин. неоднород. дифф. ур-я k-го порядка с постоянными коэф-ми и специальной правой частью:

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = f(x), \quad a_i \in \mathbb{R},$$

где $f(x) = \left[\begin{array}{l} e^{ax} P_n(x) \\ e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx \end{array}\right.,$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены степ. n и m соответственно.

Его решение $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$, где

$y_{он}$ - общее решение неодн. ур-я,

$y_{чн}$ - частное решение неодн. ур-я,

$y_{оо}$ - общее решение одн. ур-я.

План решения

1. Найдём общее решение однородного ур-я y_{oo}.

Решим хар.ур-е $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0$

Его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

Выпишем y_{oo} (см. семинар 5).

2. Найдём частное решение неоднородного ур-я $y_{чн}$.

Для правой части $f(x) = e^{ax} P_n(x)$.

Если a —

не корень	корень кратности r
характ. ур-я, то	
$y_{чн} = e^{ax} R_n(x)$	$y_{чн} = x^r e^{ax} R_n(x)$

Для правой части $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$

Если $a \pm bi$ —

не корень	корень кратности r
характ. ур-я, то	
$y_{чн} = e^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx)$,	$y_{чн} = x^r e^{ax}(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx)$,

где $N = \max(n, m)$.

Принцип наложение решений

Если правая часть ур-я $f(x)=f_1(x)+\ldots+f_e(x)$, то надо найти частные решения с правыми частями $f_1(x),\ldots,f_e(x)$ и сложить их.

3 Найдём общее решение неоднородного ур-я: $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Уравнения 2 порядка

№ 2994 (а, в, д).

Указать вид частных решений для данных неоднородных ур-ий:

а) $y''-4y=x^2e^{2x}$

Решение.

1) Хар. ур-е: $\lambda^2-4=0$

$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=-2$ некратные корни

2) Правая часть $f(x)=e^{2x}\cdot x^2 \Rightarrow a=2,\ n=2$.

$a=2$ – корень хар. ур-я кратности $1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y_{чн}=x^1e^{2x}R_2(x)=xe^{2x}(Ax^2+Bx+C)}$$

в) $y''-4y'+4y=\underbrace{\sin 2x}_{f_1(x)}+\underbrace{e^{2x}}_{f_2(x)}$

Решение.

1) Хар. ур-е: $\lambda^2-4\lambda+4=0$

$(\lambda-2)^2=0$

$\lambda=2$ корень кратн. 2.

2) Для правой части $f_1(x)=e^{2x} \Rightarrow a=2, n=0$. (т.к нет $P_n(x)$)

$a=2$ – корень хар. ур-я кратности 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_1}=x^2e^{2x}R_0(x)=$

$=x^2e^{2x}\cdot \underset{\text{это const}}{C} = Cx^2e^{2x}$

Для правой части $f_2(x)=\sin 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow a=0,\ b=2,\ n=0,\ m=0,\ N=\max(n,m)=0$

$a+bi=0+2i=2i$ – не корень хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_2}=\underbrace{e^{0x}}_{=1}(S_0(x)\cos 2x+T_0(x)\sin 2x)=$

$=A\cos 2x+B\sin 2x.$

След., $\boxed{y_{чн}=\underbrace{Cx^2e^{2x}}_{y_{чн_1}}+\underbrace{A\cos 2x+B\sin 2x}_{y_{чн_2}}}$

д) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x+xe^{2x}$.

Решение.

1) Хар. ур-е: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=3 \qquad \lambda_2=2$ некратные корни

2) <u>Для правой части $f_1(x)$</u> $=e^x(x^2+1)$

$a=1$, $n=2$.

$a=1$ не корень хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_1}=e^{ax}R_2(x)=e^x(Ax^2+Bx+C)$.

<u>Для правой части $f_2(x)$</u> $=e^{2x}\cdot x$

$a=2$, $n=1$

$a=2$ корень хар. ур-я кратности 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_2}=x^1 e^{x}R_1(x)=xe^{2x}(Dx+E)$.

След., $\boxed{y_{чн}}=y_{чн_1}+y_{чн_2}=\boxed{e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)}$

ДЗ I. №2994 (б, г, е).

№2999

Найти общее решение ур-я (т.е. решить ур-е):

Решение.

$$y''-y=e^x.$$

I сп.

(1) Решим однородное ур-е

$$y''-y=0.$$

Хар. ур-е: $\lambda^2-1=0$

$\lambda=1$ $\lambda=-1$ некратные корни

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$

общее решение однор. ур-я:

$$\boxed{y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}}$$

(2) Найдём частное решение неоднор. ур-я:

Прав. часть $f(x)=e^x$ $\Rightarrow n=0$, $a=1$.

$a=1$ корень хар. ур-я кратности 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн}=x^1e^{ax}R_0(x)=xe^x\cdot C_3=C_3xe^x.$

Найдём C_3:

$$y'_{чн}=(C_3xe^x)'=C_3e^x+C_3xe^x=C_3e^x(1+x)$$

$$y''_{чн}=(y'_{чн})'=C_3e^x(1+x)+C_3e^x=C_3e^x(2+x)$$

Подставим в исходное ур-е:

$$C_3e^x(2+x)-C_3xe^x=e^x \quad |:e^x$$

$$C_3(2+x)-C_3x=1$$

$2C_3=1$ $\quad C_3=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \boxed{y_{чн}=\frac{1}{2}xe^x}.$

Scanned by CamScanner

③ Общее решение неодн. ур-е:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

$$\boxed{y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Ответ: ↑.

II сп.

Можно решить методом неопред. коэф-в (методом Лагранжа)

① Решим однородное ур-е (см. I способ):

$$y_{оо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

② Считаем $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$.

Ищем $y_{он}$ в виде: $y_{он} = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{-x}$.

Найдём $y'_{он} = C_1'(x) e^{x} + C_1(x) e^{x} + C_2'(x) e^{-x} - C_2(x) e^{-x} =$

$$= (C_1'(x) + C_1(x)) e^{x} + (C_2'(x) - C_2(x)) e^{-x};$$

$$y''_{он} = (C_1''(x) + C_1'(x)) e^{x} + (C_1'(x) + C_1(x)) e^{x} + $$
$$+ (C_2''(x) - C_2'(x)) e^{-x} - (C_2'(x) - C_2(x)) e^{-x} =$$
$$= (C_1''(x) + 2C_1'(x) + C_1(x)) e^{x} +$$
$$+ (C_2''(x) - 2C_2'(x) + C_2(x)) e^{-x}.$$

Scanned by CamScanner

Подставим в исходное ур-е:

$$\left(C_1''(x)+2C_1'(x)+\cancel{C_1(x)}\right)e^{x}+\left(C_2''(x)-2C_2'(x)+\cancel{C_2(x)}\right)e^{-x}-$$

$$-\left(\cancel{C_1(x)}e^{x}+\cancel{C_2(x)}e^{-x}\right)=e^{x}$$

$$(C_1''+2C_1')e^{x}+(C_2''-2C_2')e^{-x}=e^{x}$$

В силу лин. независ-ти ф-ций e^{x}, e^{-x} приравняем коэф-ты при e^{x} и e^{-x}:

$$\begin{cases} C_1''+2C_1'=1 & (1)\\ C_2''-2C_2'=0 & (2)\end{cases}$$

Решим ур-я (1) и (2):

(1): Пусть $C_1'=z$

Тогда $z'+2z=1$

$$\frac{dz}{dx}=1-2z$$

$$\frac{dz}{1-2z}=dx,\ z\neq\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-\frac{1}{2}}=\int dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|z-\frac{1}{2}\right|=x+C$$

$$\ln\left|z-\frac{1}{2}\right|=-2x-2C$$

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|=e^{-2x-2C}$$

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\underbrace{e^{-2C}}_{C_3}e^{-2x},\ C_3>0$$

(2): Пусть $C_2'=w$

Тогда $w'-2w=0$

$$\frac{dw}{dx}=2w$$

$$\frac{dw}{w}=2dx,\ w\neq 0$$

$$\int\frac{dw}{w}=2\int dx$$

$$\ln|w|=2x+D$$

$$|w|=e^{2x+D}$$

$$|w|=e^{2x}\underbrace{e^{D}}_{C_4},\ C_4>0$$

$|z - \frac{1}{2}| = C_3 e^{-2x}, \; C_3 > 0$

$z - \frac{1}{2} = C_5 e^{-2x}, \; C_5 \neq 0$

Включим $z = \frac{1}{2}$ в это решение:

$z = \frac{1}{2} + C_5 e^{-2x}, \; C_5 \in \mathbb{R}$

$|w| = C_4 e^{2x}, \; C_4 > 0$

$w = C_6 e^{2x}, \; C_6 \neq 0$

Включим $w = 0$ в это решение:

$w = C_6 e^{2x}, \; C_6 \in \mathbb{R}$

Теперь найдём

$C_1(x)$:

$C_1' = \frac{1}{2} + C_5 e^{-2x}$

$\frac{dC_1}{dx} = \frac{1}{2} + C_5 e^{-2x}$

$dC_1 = \left(\frac{1}{2} + C_5 e^{-2x}\right) dx$

$\int dC_1 = \int \left(\frac{1}{2} + C_5 e^{-2x}\right) dx$

$C_1 = \frac{1}{2}x \underbrace{- \frac{C_5}{2}}_{\text{обозн. } C_9} e^{-2x} + C_7$

$C_1(x) = \frac{1}{2}x + C_9 e^{-2x} + C_7$

$C_2(x)$:

$C_2' = C_6 e^{2x}$

$\frac{dC_2}{dx} = C_6 e^{2x}$

$dC_2 = C_6 e^{2x} dx$

$\int dC_2 = \int C_6 e^{2x} dx$

$C_2 = \underbrace{\frac{1}{2} C_6}_{\text{обозн. } C_{10}} e^{2x} + C_8$

$C_2(x) = C_{10} e^{2x} + C_8$

Подставим в $y_{он}$:

$\boxed{y_{он}} = \left(\frac{1}{2}x + C_7 + C_9 e^{-2x}\right) e^x + \left(C_8 + C_{10} e^{2x}\right) e^{-x} =$

$= \frac{1}{2}x e^x + C_7 e^x + C_9 e^{-x} + C_8 e^{-x} + C_{10} e^x =$

$\boxed{= \frac{1}{2}x e^x + A e^x + B e^{-x}}$ Ответ: (Мы переобозначили $A = C_7 + C_{10}, \; B = C_8 + C_9$.)

тот же ответ.

№3000

$y'' + y = \cos x$. Задание то же.

Решение.

1) Решим однородное ур-е $y''+y=0$.

Хар. ур-е $\lambda^2+1=0$

$\lambda^2=-1$

$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$ (компл. некратные корни)

$\Rightarrow \alpha=0, \beta=1 \ ; \ \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 1\cdot i$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x$

Общее решение одноp. ур-я:

$y_{oo} = C_1\cos x + C_2 \sin x$.

2) Найдём частное решение неоднор. ур-я.

Прав. часть $f(x) = \cos x \Rightarrow n=0, m=0, a=0, b=1$.

$a+bi = i$ корень хар. ур-я кратности $1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн} = x^1 e^{0x}(S_0(x)\cos 1\cdot x + \quad \sin 1\cdot x) =$

$= x\,(C_3\cos x + C_4 \sin x)$

Найдём C_3 и C_4.

$y'_{чн} = (C_3\cos x + C_4\sin x) + x(-C_3\sin x + C_4\cos x)$

$y''_{чн} = -C_3\sin x + C_4\cos x + (-C_3\sin x + C_4\cos x) +$

$+ x(-C_3\cos x - C_4\sin x) =$

$= -2C_3\sin x + 2C_4\cos x + x(-C_3\cos x - C_4 \sin x)$

Подставим в исходное ур-е:

$$-2C_3\sin x+2C_4\cos x + x(\cancel{-C_3\cos x - C_4\sin x}) +$$

$$+ x(\cancel{C_3\cos x + C_4\sin x}) = \cos x$$

$$-2C_3\sin x + 2C_4\cos x = \cos x$$

В силу независимости ф-ций $\sin x$ и $\cos x$ приравняем коэф-ты при $\sin x$ и при $\cos x$:

$-2C_3 = 0$ $\qquad$ $2C_4 = 1$

$C_3 = 0$ $\qquad$ $C_4 = \frac{1}{2}$

След., $y_{чн} = \frac{1}{2} x \sin x$

③ Общее решение неоднородн. ур-е:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

$$y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2} x\sin x.$$

Ответ: ↑.

№ 3004.

$$y'' + y' = \sin^2 x.$$

Решение.

① Решим однородное ур-е $y'' + y' = 0$.

Хар. ур-е: $\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$ действит. некратные корни

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-1x} = e^{-x}$

Общее решение одн. ур-я: $y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

② Найдём частное решение неоднородн. ур-я.

Прав. часть $f(x) = \sin^2 x \overset{\text{преобразуем}}{=} \frac{1 - \cos 2x}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{f_1(x)} \underbrace{- \frac{1}{2}\cos 2x}_{f_2(x)}$

Для прав. части $f_1(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$ (т.к. нет e^{ax}), $n = 0$ (т.к. $\frac{1}{2}$ – многочлен нулевой степени $P_0(x)$).

$a = 0$ – корень кратности 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_1} = x^1 \cdot e^{0x} R_0(x) = x \cdot 1 \cdot C_3 = C_3 x$

Для прав. части $f_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0, b = 2, n = 0, m = 0 \Rightarrow N = 0$

$a + bi = 0 + 2i = 2i$ не корень хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_2} = e^{0x}(S_0(x)\cos 2x + T_0(x)\sin 2x) = C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$

След., $y_{чн} = y_{чн_1} + y_{чн_2} = C_3 x + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$.

Найдём C_3, C_4, C_5.

$$y'_{чн} = C_3 - 2C_4 \sin 2x + 2C_5 \cos 2x$$

$$y''_{чн} = -4C_4 \cos 2x - 4C_5 \sin 2x$$

Подставим в исходное ур-е:

$$(-4C_4 \cos 2x - 4C_5 \sin 2x) + (C_3 - 2C_4 \sin 2x + 2C_5 \cos 2x) =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

В силу независ-ти $\cos 2x$ и $\sin 2x$ и $\frac{1}{2}$ приравняем коэф-ты при них:

$$\begin{cases} -4C_4 + 2C_5 = -\frac{1}{2} \\ -4C_5 - 2C_4 = 0 \\ C_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \frac{1}{2} \\ C_4 = \frac{1}{10} \\ C_5 = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

След., $y_{чн} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$.

3 Общее решение неоднор. ур-е:

$$y_{он} = \underbrace{C_1 + C_2 e^{-x}}_{y_{оо}} + \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x}_{y_{чн}}$$

Ответ: ↑.

№3016.

$$y''-2y'+10y=\sin 3x+e^x.$$

Решение.

1) Решим однородное ур-е: $y''-2y'+10y=0$.

Хар. ур-е: $\lambda^2-2\lambda+10=0$; $D=\sqrt{4-4\cdot 10}=2\sqrt{-9}=$
$=6i$

$$\lambda_{1,2}=\underbrace{1\pm 3i}_{\alpha\pm\beta i}\Rightarrow \alpha=1,\ \beta=3$$

компл. некратные корни

$$\Rightarrow \text{ФСР}:\quad y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^x\cos 3x$$
$$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^x\sin 3x$$

Общее решение однородн. ур-я:

$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

2) Найдём частное решение неоднородн. ур-я.

Правая часть $f(x)=\underbrace{\sin 3x}_{f_2(x)}+\underbrace{e^x}_{f_1(x)}$

Для правой части $f_1(x)=e^x$ $\Rightarrow a=1,\ n=0$

$a=1$ не корень хар. ур-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{чн_1}=e^{ax}R_0(x)=C_3e^x$$

Для правой части $f_2(x)=\sin 3x$ $\Rightarrow a=0,\ b=3$
$n=0,\ m=0\Rightarrow N=0$

$a+bi=0+3i=3i$ не корень хар. ур-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{чн_2}=e^{ax}(S_0(x)\cos bx+T_0(x)\sin bx)=$$
$$=C_4\cos 3x+C_5\sin 3x.$$

След., $y_{чн} = C_3 e^x + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$

Найдём C_3, C_4, C_5.

$y'_{чн} = C_3 e^x - 3C_4 \sin 3x + 3C_5 \cos 3x$

$y''_{чн} = C_3 e^x - 9C_4 \cos 3x - 9C_5 \sin 3x$

Подставим в исходное ур-е:

$$(C_3 e^x - 9C_4 \cos 3x - 9C_5 \sin 3x) - 2(C_3 e^x - 3C_4 \sin 3x + 3C_5 \cos 3x) +$$

$$+ 10(C_3 e^x + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x) = \sin 3x + e^x$$

Ф-ции $e^x, \cos 3x, \sin 3x$ лин. незав. $\Rightarrow$ приравн. к-ты. Получим систему ур-ий:

$$\begin{cases} C_3 - 2C_3 + 10C_3 = 1 \\ -9C_4 - 6C_5 + 10C_4 = 0 \\ -9C_5 + 6C_4 + 10C_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \frac{1}{9} \\ C_4 = \frac{6}{7} \\ C_5 = \frac{1}{7} \end{cases}$$

След., $y_{чн} = \frac{1}{9} e^x + \frac{6}{7} \cos 3x + \frac{1}{7} \sin 3x$

③ Общее решение неоднородн. ур-е:

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$

$y_{он} = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{9} e^x + \frac{6}{7} \cos 3x + \frac{1}{7} \sin 3x$

$y_{он} = e^x\left(\frac{1}{9} + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \frac{6}{7} \cos 3x + \frac{1}{7} \sin 3x$

Ответ: ↑

ДЗ II № 2995, 3002, 3003, 3012, 3018.

№3019.

Найти решение уравнения

$$y''-2y'=e^{2x}+x^2-1,$$

удовл. условиям $y=\frac{1}{8}$, $y'=1$ при $x=0$.

Решение.

(1) Найдём общее решение однородн. ур-я

$$y''-2y'=0.$$

Хар. ур-е: $\lambda^2-2\lambda=0$

$\lambda(\lambda-2)=0$

$\lambda=0$, $\lambda=2$ — действит. некратные корни

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1=e^{0x}=1$, $y_2=e^{2x}$

Общее решение одноp. ур-я: $y_{oo}=C_1\cdot 1+C_2e^{2x}$.

(2) Найдём частное решение неоднородн. ур-я.

Правая часть $=\underbrace{e^{2x}}_{f_1(x)}+\underbrace{x^2-1}_{f_2(x)}$

Для правой части $f_1(x)=e^{2x}$

$a=2$, $n=0$

$a=2$ — корень хар. ур-я кратности $r=1$

$\Rightarrow y_{чн_1}=\underbrace{C_3}_{\text{обозн. } D}x^1e^{2x}=Dxe^{2x}$

Для правой части $f_2(x)=x^2-1$

$a=0$ (т.к. нет e^{ax}), $n=2$

$a=0$ — корень хар. ур-я кратности $r=1$

$\Rightarrow y_{чн_2}=\underbrace{(Ax^2+Bx+C)}_{R_2(x)}x^1e^{0x}=Ax^3+Bx^2+Cx$

След., $y_{чн}=Ax^3+Bx^2+Cx+Dxe^{2x}$.

Найдём A, B, C, D.

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx + C + D(2x+1)e^{2x}$$

$$y''_{чн} = 6Ax + 2B + 4D(x+1)e^{2x}$$

Подставим в исходное неоднородное ур-е:

$$\left(6Ax + 2B + 4D(x+1)e^{2x}\right) - 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C + D(2x+1)e^{2x}\right) =$$

$$= e^{2x} + x^2 - 1$$

$$e^{2x}\,2D(\cancel{2x}+2-\cancel{2x}-1) - 6Ax^2 + 2(3A-2B)x + 2(B-C) =$$

$$= e^{2x} + x^2 - 1$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2D = 1 \\ -6A = 1 \\ 3A - 2B = 0 \\ 2(B-C) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{2} \\ A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

След., $y_{чн} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}xe^{2x}$

③ Общее решение неоднор. ур-я:

$$y_{он} = \underbrace{C_1 + C_2e^{2x}}_{y_{оо}} \underbrace{- \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}xe^{2x}}_{y_{чн}}$$

(4) Решим задачу Коши.
Н.у.: $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{8}$, $y'=1$.

Подставим в $y_{он}$, получим

$$\frac{1}{8}=C_1+C_2e^0 \Rightarrow C_1+C_2=\frac{1}{8}.$$

Найдём $y'_{он}$:

$$y'_{он}=2C_2e^{2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(e^{2x}+2xe^{2x})$$

Подставим н.у. в $y'_{он}$, получим

$$1=2C_2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} \Rightarrow 2C_2=\frac{1}{4}$$

Решим сист. ур-ий:

$$\begin{cases} C_1+C_2=\frac{1}{8} \\ 2C_2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Получим искомое решение:

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}xe^{2x}=$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x.$$

Ответ: ↑.