Линейные уравнения ≥ 2 порядка

- однородные
  - с постоянными коэф-ми (занятие 5)
  - с любыми коэф-ми
    Частный сл.:
    ур-е 2 пор. и известно одно из его решений y_1. (занятие 7, ф-ла Остроградского-Лиувилля)
- неоднородные
  - с постоянными коэф-ми и
    - спец. правой частью (занятие 6)
    - любой правой частью (занятие 7, метод Лагранжа)
  - с любыми коэф-ми и любой правой частью.
    Частный сл.:
    ур-е 2 пор. и известно одно из решений y_1 соотв. одноp. ур-я. (Занятие 7. ф-ла Остроградского-Лиувилля)

Занятие 7.

Решение линейных неоднородных ур-ий высшего порядка методом вариации постоянных.

№3033

Решить ур-е $y'' + y = ctg\,x$ методом вариации постоянных. ← Это нестандартная правая часть

Решение. Это лин. ур-е с постоянными коэф-ми.

(1) Решим однородное ур-е $y'' + y = 0$

Хар. ур-е $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$\underset{\alpha + i\beta}{\lambda_1 = i}$, $\lambda_2 = -i$ Компл. некратные корни

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = 1\cos\beta x = \cos x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = 1\sin\beta x = \sin x$

Общее решение одн. ур-я:

$y_{oo} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

(2) Найдём общее решение неоднородного ур-я, считая C_1 и C_2 функциями от x: Метод Лагранжа (вариации постоянных)

$$y_{он} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находят (из теории) из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$, где у нас $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1'(-\sin x) + C_2' \cos x = ctg\, x \end{cases}$$

Найдём C_1', C_2' по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ ctg\, x & \cos x \end{vmatrix} = -ctg\, x \sin x = -\cos x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & ctg\, x \end{vmatrix} = \cos x \cdot ctg\, x = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

След., $C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\cos x$ $\qquad$ $C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

Найдём C_1 и C_2:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\cos x$$

$$dC_1 = -\cos x\, dx$$

$$\int dC_1 = -\int \cos x\, dx$$

$$C_1 = -\sin x + D_1$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$dC_2 = \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$$

$$\int dC_2 = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx$$

$$C_2 = \ln \left|tg \frac{x}{2}\right| + \cos x + D_2$$

Подставим в $y_{он}$:

$$y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

$$y_{он} = (-\cancel{\sin x} + D_1)\cos x + (\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + \cancel{\cos x} + D_2)\sin x =$$

$$= \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + D_1 \cos x + D_2 \sin x.$$

Ответ: ↑.

Зам. Из теории $C_1', \dots, C_n'$ находят из системы ур-ий:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Эта система имеет единств. решение, т.к. её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.к. это определитель Вронского для ФСР $y_1(x), \dots, y_n(x)$ (они лин. независимы).

№3035.

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

Решение. Это лин. ур-е с пост. коэф. и нестандартн. правой частью.

1) Решим однородное ур-е $y'' + 2y' + y = 0$.

Хар. ур-е $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda = -1$ корень кратности 2.

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$

Общее решение однородной лин. ур-ия

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

2) Найдём общее решение неоднор. ур-ф в виде $y_{он} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$. Это метод Лагранжа.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдём из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}, \text{ где } y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 & / : e^{-x} \\ -C_1' e^{-x} + C_2'(e^{-x} - xe^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{x} & / : e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ -C_1' + C_2'(1-x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) + x = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 1-x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

След., $c_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$, $c_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x}$.

Найдём C_1 и C_2:

$$\frac{dC_1}{dx} = 1$$

$$dC_1 = dx$$

$$\int dC_1 = \int dx$$

$$C_1 = x + D_1, \quad D_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dC_2 = \frac{1}{x} dx$$

$$\int dC_2 = \int \frac{1}{x} dx$$

$$C_2 = \ln|x| + D_2, \quad D_2 \in \mathbb{R}.$$

ДЗ I №3032, 3034, 3037.

Подставим в $y_{он}$:

$$y_{он} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

$$y_{он} = (x + D_1) e^{-x} + (\ln|x| + D_2) x e^{-x} =$$

$$= e^{-x} (x \ln|x| + x \underbrace{(D_2 + 1)}_{\text{обозн. } D_3} + D_1) =$$

$$= e^{-x} (x \ln|x| + D_3 x + D_1). \leftarrow \text{Ответ:}$$

Формула Остроградского-Лиувилле

Рас. линейное неоднородное ур-е 2 пор. с любыми коэф-ми:

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x).$$

1) Решим однородное ур-е $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$
его коэф-ты не обязат. постоянные.
Пусть известно одно из его решений $y_1(x)$. Это одно из ФСР.

Тогда другое решение (из ФСР)

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2(x)}\, dx.}$$

Это ф-ла Остроградского-Лиувилле.

След., $y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2) Решить неоднородное ур-е можно, например, методом вариации постоянных:

$$y_{oн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

7

№2971.

Решить однородное ур-е $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

Решение.

1) Найдём $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx =$

$$= \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\,dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{\ln \frac{1}{x^2}}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\,dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{ctg}\, x = -\frac{\cos x}{x}$$ (можно не писать $+C$, т.к. y_2 — одно из решений)

2) Общее решение одноp. ур-я

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$$

Ответ: можно переобозн. на $+C_3$.

$$y_{oo} = \frac{C_1 \sin x - \widetilde{C_2} \cos x}{x}, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Д13 II № 2972 Указание. Разделить ур-е на $x^2(\ln x - 1)$.

№ а).

Проинтегрировать уравнение

$$x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x},$$

где $y_1 = x$ частное решение соответствующего однородного уравнения.

Решение.

Приведём неоднородн. ур-е к станд. (приведённому виду), для этого разделим ур-е на старший коэф-т $x^2(1-\ln x)$:

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x(1-\ln x)}}_{\text{это } p_1(x)} y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

($x=0$ и $x=1$ не явл. реш.)

(1) Найдём $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx =$

(y_1 и y_2 – это ФСР однородного уравнения)

$$= x\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x(1-\ln x)}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{-\int \frac{d\ln x}{1-\ln x}}}{x^2}dx =$$

$$= x\int \frac{e^{\int \frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\ln|\ln x-1|}}{x^2}dx =$$ ("снимем" модуль с $\oplus$ без подробностей)

$$= x\int \frac{\ln x-1}{x^2}dx = x\left[\int \frac{\ln x}{x^2}dx - \int \frac{dx}{x^2}\right] =$$

$$= x\left[-\int \ln x \, d\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right] =$$

$$= x\left[-\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x}\,d\ln x\right)+\frac{1}{x}\right]=$$

$$= -\ln x + x\int\frac{1}{x^2}dx + 1 =$$

$$= -\ln x - x\cdot\frac{1}{x} + 1 = -\ln x$$

(2) Общее решение однородн. ур-е:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y_{oo} = C_1 x \underbrace{- C_2}_{\text{обозн. } C_3} \ln x = C_1 x + C_3 \ln x$$

$\boxed{\text{Зам. } \ln x \text{ тоже яв. решением однор. ур-е. След., считаем } y_2 = \ln x.}$

(3) Найдём общее решение неоднородн. ур-е в виде

$$y_{он} = C_1(x)x + C_2(x)\ln x$$

(метод Лагранжа = метод вариации пост.)

Найдём C_1' и C_2' из системы ур-ий

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' x + C_2' \ln x = 0 & (1) \\ C_1'\cdot 1 + C_2'\frac{1}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3} & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow C_2' = -\frac{x}{\ln x}C_1'$

Подст. в (2): $C_1' - \frac{x}{\ln x}C_1'\cdot\frac{1}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3}$

$$C_1'\left(1-\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1-\ln x}{x^3}$$

$$C_1' = \frac{-\ln x}{x^3} \Rightarrow C_2' = \frac{1}{x^2}$$

Итак, $\begin{cases} C_1' = -\frac{\ln x}{x^3} \\ C_2' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

Найдём C_1 и C_2:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{\ln x}{x^3}$$

$$dC_1 = -\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$\int dC_1 = \int \ln x \, d\frac{1}{2x^2}$$

по частям:

$$C_1 = \ln x \cdot \frac{1}{2x^2} - \int \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$C_1 = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + D_1$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$dC_2 = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int dC_2 = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{x} + D_2$$

След, общее решение неоднор. ур-я:

$$\boxed{y_{он}} = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + D_1\right)x + \left(-\frac{1}{x} + D_2\right)\ln x =$$

$$= \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{4x} + D_1 x - \frac{\ln x}{x} + D_2 \ln x =$$

$$\boxed{= -\frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{4x} + D_1 x + D_2 \ln x}, \text{ где } D_1, D_2 \in \mathbb{R}$$

Ответ. ↑

№ 6)

$$y'' - y' + e^{2x} y = e^{3x};$$

$y_1 = \cos(e^x)$ – частное решение однор. ур-я

Решение.

1) Найдём $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2} dx =$

$$= \cos(e^x) \int \frac{e^{-\int(-1)dx}}{\cos^2 e^x} dx = \cos(e^x) \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} =$$

$$= \cos(e^x) \int \frac{de^x}{\cos^2(e^x)} = \cos(e^x) \cdot tg(e^x) = \sin(e^x)$$

2) Общее решение однородного ур-я:

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos(e^x) + C_2 \sin(e^x)$$

3) Найдём общее решение неоднор. ур-я.

Зам. Как на занятии 6, т.к. хоть правая часть (решить не получится)
$f(x) = e^{3x}$ имеет специальный вид,
но однор. ур-е имеет не постоянные коэф-ты
$\Rightarrow$ Методом Лагранжа. ($\Rightarrow$ не написать хар. ур-е)

$$y_{он} = C_1(x)\cos(e^x) + C_2(x)\sin(e^x)$$

Найдём $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ из системы ур-ий:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos(e^x) + C_2' \sin(e^x) = 0 \\ C_1'(-\sin(e^x) \cdot e^x) + C_2' \cos(e^x) e^x = e^{3x} \end{cases}$$

Методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(e^x) & \sin(e^x) \\ -\sin(e^x)\cdot e^x & \cos(e^x)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2(e^x)e^x + \sin^2(e^x)e^x = e^x$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(e^x) \\ e^{3x} & \cos(e^x)e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}\sin(e^x)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(e^x) & 0 \\ -\sin(e^x)e^x & e^{3x} \end{vmatrix} = e^{3x}\cos(e^x)$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-e^{3x}\sin(e^x)}{e^x} = -e^{2x}\sin(e^x)$$

$$C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{3x}\cos(e^x)}{e^x} = e^{2x}\cos(e^x)$$

Найдем C_1, C_2:

$\frac{dC_1}{dx} = -e^{2x}\sin(e^x)$	$\frac{dC_2}{dx} = e^{2x}\cos(e^x)$
$dC_1 = -e^{2x}\sin(e^x)dx$	$dC_2 = e^{2x}\cos(e^x)dx$
$\int dC_1 = -\int e^x\sin(e^x)de^x$	$\int dC_2 = \int e^x\cos(e^x)de^x$
$C_1 = \int e^x d\cos(e^x) =$	$C_2 = \int e^x d\sin(e^x) =$
$= e^x\cos(e^x) - \int\cos(e^x)de^x =$	$= e^x\sin(e^x) - \int\sin(e^x)de^x =$
$= e^x\cos(e^x) - \sin(e^x) + D_1$	$= e^x\sin(e^x) + \cos(e^x) - D_2$

След, общее решение неоднородного ур-е:

$$\boxed{y_{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 =$$

$$= \left(e^x\cos(e^x) - \sin(e^x) + D_1\right)\cos(e^x) +$$

$$+ \left(e^x\sin(e^x) + \cos(e^x) + D_2\right)\sin(e^x) =$$

$$= e^x\left(\cos^2(e^x) + \sin^2(e^x)\right) \cancel{- \sin(e^x)\cos(e^x)} +$$

$$\cancel{+\cos(e^x)\sin(e^x)} + D_1\cos(e^x) + D_2\sin(e^x) =$$

$$\boxed{= e^x + D_1\cos(e^x) + D_2\sin(e^x)}, \text{ где } D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

↑

Ответ:

ДЗ III Решите ур-е:

№ а) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, где $y_1 = \frac{1}{x}$ – частное решение однор. ур-я

№ б) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$, где $y_1 = x$.

Также: Решите задачу 5 из ДЗ2.