Занятие 8, часть 1

Линейные уравнения 1 порядка с любыми коэффициентами

однородные

$y' + P(x)y = 0.$

Это ур-е с раздел. переменными

(занятие 1)

неоднородные

$y' + P(x)y = Q(x)$

(занятие 2)

I способ. Метод Лагранжа

II способ. Метод Бернулли

Также проходим:

- Уравнение с раздел. переменными
- Однородные ур-я 1 пор (по переменным x и y) (занятие 1)
- Уравнение Бернулли (занятие 2)
- Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка (занятие 3)

Подготовка к РК2

I. Составление ОДУ

№1. Составить линейное однородное ур-е, зная корни его характеристич. ур-я $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$. Написать общее решение составл. ур-я.

Решение.

① Хар. ур-е с корнями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$
$$\lambda(\lambda^2-7\lambda+10)=0$$
$$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$$

Такое хар. ур-е соответствует одноp. ур-ю $y'''-7y''+10y'=0$

② Общее решение: $y=C_1e^{0x}+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}$,

т.е. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}$

№2. То же задание для

$\lambda_1=1$ кратности 2, $\lambda_2=3$

Решение.

2

1) Хар. ур-е:

$$(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$$

$$(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda^2+6\lambda+\lambda-3=0$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3=0$$

Соотв. ур-е:

$$y'''-5y''+7y'-3y=0$$

2 Общее решение: $y=C_1e^{1x}+C_2x\cdot e^{1\cdot x}+C_3e^{3x}$

т.е. $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{3x}$

№3 То же задание для

$\lambda_1=7,\ \lambda_{2,3}=1\pm5i$

Решение.

1) Хар ур-е: $(\lambda-7)(\lambda-(1+5i))(\lambda-(1-5i))=0$

$$(\lambda-7)(\lambda^2-(1-5i)\lambda-(1+5i)\lambda+(1+5i)(1-5i))=0$$

$$(\lambda-7)(\lambda^2-2\lambda+6)=0$$

$$\lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-7\lambda^2+14\lambda-42=0$$

$$\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda-42=0$$

Соотв. ур-е: $y'''-9y''+20y'-42y=0$

2) Общее решение:

$$y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{1x} \cos 5x + C_3 e^{1x} \sin 5x.$$

№4. Могут ли ф-ции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являться ФСР лин. однор. дифф. ур-е. Если да, то составить это ур-е.

I сп. См. Занятие 5, стр 14 №2969 и ДЗ к этому занятию.

(Исп. определитель Вронского)

II сп. Составить хар. ур-е, а по нему восстановить дифф. ур-е.

Для $y_1 = e^{x}$ и $y_2 = e^{-2x}$

Решение.

1 Проверка лин. независ-ти ф-ций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$$

опр Вронского

$\Rightarrow$ лин независ

2 Составим ур-е.

I сп. Если общ. реш. ур-я имеет вид $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$,

то ф-ции $y(x), y_1(x), y_2(x)$ лин. завис. $\Rightarrow$
$\Rightarrow W[y, y_1, y_2]=0$

$$W[y,y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y & e^x & e^{-2x} \\ y' & e^x & -2e^{-2x} \\ y'' & e^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^x e^{-2x}\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 1 & -2 \\ y'' & 1 & 4 \end{vmatrix}=e^{-x}(4y+y'-2y''-y''+2y-4y')=$$

$$=e^{-x}(-3y''-3y'+6y)=$$

$=e^{-x}(-3)(y''+y'-2y)=0 \Rightarrow \boxed{y''+y'-2y=0}$ искомое д.у.

II сп. Рас. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ и соотв. хар. ур-е:

$$(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

Соотв. дифф. ур-е:

$$y''+y'-2y=0$$

Могут;

Ответ: $y''+y'-2y=0$.

№5. Тот же вопрос для $y_1=e^x\sin 2x$
$y_2=e^x\cos 2x$.

Решение. Сделаем для примера только

2) II сп. Рас. $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2=1-2i$.

Хар. ур-е: $(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1-2i))=0$

$$\lambda^2-\lambda(1-\cancel{2i}+1+\cancel{2i})+(1+4)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

Соотв. дифф. ур-е: $y''+2y'+5y=0$

№6. Составить линейное неоднородное дифф. уравнение, общее решение которого имеет вид $y = ce^{5x} + \cos x$.

Решение. $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \Rightarrow y_{оо} = ce^{5x}$,
$y_{чн} = \cos x$.

1) Составим однородн. ур-е с общим решением $y = ce^{5x}$

I сп. Т.к. y и $y_1 = e^{5x}$ лин. завис., то $W[y, y_1] = 0$. Найдём опред-ль Вронского

$$W[y, y_1] = \begin{vmatrix} y & e^{5x} \\ y' & 5e^{5x} \end{vmatrix} = e^{5x} \begin{vmatrix} y & 1 \\ y' & 5 \end{vmatrix} = e^{5x}(5y - y') = 0$$

След, однор. ур-е имеет вид $y' - 5y = 0$.

II сп. Рас. хар. ур-е $\lambda - 5 = 0$. Соотв. ему однор. дифф. ур-е: $y' - 5y = 0$ имеет данное общее решение.

2) Составим неоднор. ур-е с частным решением $y = \cos x$.

$y_{чн} = \cos x = e^{0x} A \cos 1x \Rightarrow A = 1, \overset{n=0}{,}\ a = 0, b = 1$ и $a + bi = i$ не явл. корнем хар. ур-я.

$\Rightarrow$ прав. часть $f(x) = e^{ax}(P_0(x) \cos bx + Q_0(x) \sin bx) =$
$= B\cos x + C\sin x$

Найдём B и C. Для этого подставим $y_{чн} = \cos x$ в неоднор. ур-е $y' - 5y = B\cos x + C\sin x$, получим
$-\sin x - 5\cos x = B\cos x + C\sin x \Rightarrow$ в силу независ. $\cos x$ и $\sin x$

$\Rightarrow C = -1,\ B = -5$

$\boxed{\text{Ответ: } y' - 5y = -5\cos x - \sin x}$

№7. То же задание для $y = C\cos x + 1$.

Решение. $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \Rightarrow y_{оо} = C\cos x$; $y_{чн} = 1$

1) Составим однор. ур-е с общим решением

$$y_{оо} = C\cos x.$$

Рас. ФСР $y_1 = \cos x \Rightarrow$ общее решение однор ур-я y и y_1 лин. завис $\Rightarrow$

$\Rightarrow W[y, y_1] = 0$. Найдём

$$W[y, y_1] = \begin{vmatrix} y & \cos x \\ y' & -\sin x \end{vmatrix} = -y\sin x - y'\cos x = 0$$

Получим однор. ур-е $y'\cos x + y\sin x = 0$. (его коэф-ты не постоянные!)

2) Составим неоднор. ур-е с частным решением $y_{чн} = 1$.

Например, так: пусть правая часть неоднор. ур-я равна $D(x)$, т.е. неодн. ур-е имеет вид:

$$y'\cos x + y\sin x = D(x).$$

Подставим $y_{чн} = 1$, получим

$$0\cdot\cos x + 1\sin x = D(x)$$

След, $D(x) = \sin x$.

Ответ: $y'\cos x + y\sin x = \sin x$

Например так: пусть правая часть неоднор. ур-я равна $C_1\cos x + C_2\sin x$, т.е.

$$y'\cos x + y\sin x = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Подставим $y_{чн} = 1$, получим $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.