Занятие 8. Часть 2.

Интегрирование нормальных систем ОДУ первого порядка сведением к дифференциальному ур-ю высшего порядка.

Опр. Канонической системой дифф. ур-ий наз. система

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1(x, \underbrace{y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}}_{\text{производные } y_1 \text{ до порядка } p_1-1}, \dots, \underbrace{y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}}_{\text{производные } y_k \text{ до порядка } p_k-1}) \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}) \\ \vdots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}) \end{cases}$$

Порядком системы наз. число $n = p_1 + \dots + p_k$

Частным случаем канонич. системы явл. нормальная система дифф. ур-ий:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_k) \\ \vdots \\ y_k'(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_k) \end{cases}$$

Для норм. системы $p_1 = 1, \dots, p_k = 1$. Поэтому порядок норм. системы равен $k = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ раз}}$, т.е. числу ур-ий в системе.

Решением норм. системы на (a, b) наз. совокупность ф-ций $y_1(x), \dots, y_k(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b), которые при подстановке в систему обращают её уравнения в тождества относительно x.

(1-м интегралом)
Интегралом норм. системы на (a,b)

наз. функция $\Phi(x, y_1, \dots y_k)$, непрерывно дифференцируемая на (a,b),
которая при подстановке в неё произвольного решения системы принимает постоянное значение, т.е. $\Phi(x, y_1(x), \dots, y_k(x)) = C$

Общим интегралом норм. системы на (a,b)

наз. система из k независимых первых интегралов $\Phi_1(x, y_1, \dots, y_k), \dots, \Phi_k(x, y_1, \dots, y_k)$,

т.е. $\begin{cases} \Phi_1(x, y_1(x), \dots, y_k(x)) = C_1 \\ \vdots \\ \Phi_k(x, y_1(x), \dots, y_k(x)) = C_k \end{cases}$

Пример.

Привести канонич. систему дифф. ур-ий

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

к нормальному виду.

Решение.

1) Введём новые переменные y_3 и y_4 так:

$$y_3 = y_1'$$
$$y_4 = y_2'$$

2) Тогда систему можно переписать в норм. виде:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_4' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Ответ:

Дифф. ур-е $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ можно записать в виде норм. системы так.

1) Введём новые переменные:

$$y_1=y$$
$$y_2=y' \quad (=y_1')$$
$$\vdots$$
$$y_n=y^{(n-1)} \quad (=y_{n-1}') \qquad (\Rightarrow y_n'=y^{(n)})$$

2) Запишем норм. систему:

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=f(x,y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

Пример.

Записать дифф. ур-е $y''+k^2y=0$ в виде нормальной системы дифф. ур-ий.

Решение.

1) Введём новые переменные

$$y_1=y$$
$$y_2=y' \quad (=y_1') \qquad (\Rightarrow y_2'=y'')$$

2) Запишем норм. систему

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=-ky_1 \end{cases}$$

Ответ:

Нормальную систему можно записать в виде дифф. уравнение.

Пример:

Записать норм. систему дифф. ур-ий

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) & (1) \\ z' = g(x,y,z) & (2) \end{cases}$$

в виде дифф. уравнения.

Решение. Метод исключения.

1) Выразим z из ур-я (1)

2) Продифференцируем получившееся в 1) выражение по x, получим z'.

3) Подставим z из 1) и z' из 2) в уравнение (2), получим ур-е относит. x, y, y', y''. Мы исключили переменную z и получили ур-е 2 порядка.

Решить норм. систему дифф. ур-ий

Решение методом исключения

1) Получить дифф. ур-е как в пред. примере

2) Решить дифф. ур-е и 3) вернуться к переменным системы. Получим решение системы.

№3079.

Решить систему ур-ий $\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' + y + 3z = 0 \end{cases}$

Решение.

Данная система явл. нормальной: $\begin{cases} y' = y + 5z \quad (1) \\ z' = -y - 3z \quad (2) \end{cases}$

1) Получим из системы одно дифф. ур-е.

Из (1) $\Rightarrow z = \frac{1}{5}(y' - y)$

Продифф. это ур-е:

$z' = \frac{1}{5}(y'' - y')$

Подставим z и z' в (2):

$\frac{1}{5}(y'' - y') = -y - 3 \cdot \frac{1}{5}(y' - y) \quad \cdot 5$

$y'' - y' = -5y - 3(y' - y)$

$y'' - y' + 5y + 3y' - 3y = 0$

$y'' + 2y' + 2y = 0$ Это линейное однородн. ур-е с постоянными коэф.

2) Решим ур-е и найдём y.

Хар. ур-е: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

ФСР: $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$

След., $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x =$

$= e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

это y_{oo}

3) Найдём z. Из 2) $\Rightarrow y' = \ldots = e^{-x}((C_2 - C_1)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x)$

След., из 1): $z = \frac{1}{5}(y' - y) = \ldots = \frac{1}{5}e^{-x}((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x)$

Мы получили

$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

$z = \frac{1}{5}e^{-x}((C_2-2C_1)\cos x - (C_1+2C_2)\sin x)$

Ответ: ↑.

№3080.

Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - z \\ \frac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$

Решение

Данная система яв. нормальной: $\begin{cases} y' = -3y - z & (1) \\ z' = y - z & (2) \end{cases}$

1) Получим из системы одно дифф. ур-е.

Из (1) $\Rightarrow z = -3y - y'$.

Продифф. это ур-е: $z' = -3y' - y''$.

Подставим z и z' в (2):

$$-3y' - y'' = y - (-3y - y')$$

$y'' + 4y' + 4y = 0$ Это линейное однородное ур-е с пост. коэф.

2) Решим ур-е и найдём y.

Хар ур-е: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda+2)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -2$ (кратноси 2)

ФСР: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$

$\Rightarrow$ $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

это $y_{оо}$ $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$

3) Найдём z. Из 2) $\Rightarrow y' = -2e^{-2x}(c_1 + c_2 x) + e^{-2x} c_2 =$

$= e^{-2x}(-2c_1 + c_2 - c_2 x)$

Подставим y из 2) и y' из 3) в z из 1):

$$z = -3e^{-2x}(c_1 + c_2 x) - e^{-2x}(-2c_1 + c_2 - c_2 x) =$$
$$= e^{-2x}(-c_1 + c_2 - c_2 x)$$

Мы получили:

$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$
$z = e^{-2x}(c_2 - c_1 - c_2 x)$ ← Ответ.

№3087

Решить систему ур-ий: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2} y \end{cases}$

Решение $\boxed{\text{ОДЗ системы: } z \neq 0}$

Система явл. нормальной: $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} & (1) \\ z' = \dfrac{1}{2} y & (2) \end{cases}$

I способ

Решаем аналогично.

1) $(1) \Rightarrow z = \dfrac{y^2}{y'}$

Дифф.: $z' = \dfrac{2yy'y' - y^2 y''}{(y')^2} = \dfrac{2y(y')^2 - y^2 y''}{(y')^2}$

Подст. z и z': $\dfrac{2y(y')^2 - y^2 y''}{(y')^2} = \dfrac{1}{2} y$ (подставлен z некуда) $| : y$

$$\frac{2(y')^2 - yy''}{(y')^2} = \frac{1}{2}$$

$4(y')^2 - 2yy'' = (y')^2$

$3(y')^2 - 2yy'' = 0$ Это ур-е типа $F(y, y', y'') = 0$ (Оно не содержит x (см. занятие 3)

Ч. т. а. (сложно!)

II способ

1) (2) $\Rightarrow$ $y = 2z'$

Дифф: $y' = 2z''$

Подст. в (1):

$$2z'' = \frac{(2z')^2}{z}$$

$$2z''z = 4(z')^2$$

$$z''z = 2(z')^2$$ Это ур-е того же типа как и в I способе: $F(z, z', z'') = 0$. И т.д. (сложно) :)

III способ (самый лёгкий)

Разделим (2) на (1): Мы рас. $y \neq const$ (в частн., $y \neq 0$)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{1}{2}y}{\frac{y^2}{z}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}\frac{z}{y}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dy}{y}$$

$$2\ln|z| = \ln|y| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln z^2 = \ln(|y|C_1), \quad C_1 > 0$$

$$z^2 = C_1|y|$$

$$z^2 = C_2 y, \quad C_2 \neq 0$$

$$y = \underbrace{\frac{1}{C_2}}_{= C_3} z^2, \quad C_3 \neq 0$$

Подст. в (2): $z' = \frac{1}{2}C_3 z^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C_3}{2}z^2$$

1 сл.

$$\frac{2\,dz}{z^2} = C_3 dx \quad \text{при } z \neq 0$$

2 сл.
$z = 0$ – невозм. по ОДЗ системы.

$$2\int z^{-2} dz = C_3 \int dx$$

$$2\frac{z^{-1}}{-1} = C_3 x + C_4$$

$$-\frac{2}{z} = C_3 x + C_4$$

$$z = -\frac{2}{C_3 x + C_4}, \quad C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; C_4 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C_3 z^2 = C_3 \frac{4}{(C_3 x + C_4)^2}$$

Мы получили: $\begin{cases} y = \dfrac{4C_3}{(C_3 x + C_4)^2} \\ z = -\dfrac{2}{C_3 x + C_4} \end{cases}$

Рас. случай $y = \text{const}$, напр, $y = C_5$.
Подставим в систему: $\begin{cases} 0 = -3C_5 - z \\ z' = C_5 - z \end{cases}$

$$z = -3C_5 \Rightarrow z' = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 = C_5 - (-3C_5)$$

$$0 = 4C_5$$

$$\Downarrow$$

$$C_5 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Невозм. по ОДЗ сис.

Ответ:

(в ответах задачника ответ записан ~~немного~~ по-другому, но они (эти ответы) друг к другу приводятся)

№3088.

(а) Решить систему $\frac{dx}{x^3+3xy^2}=\frac{dy}{2y^3}=\frac{dz}{2y^2z}$

Решение. ОДЗ системы: $y\neq 0, z\neq 0$, $x\neq 0$

Эту систему можно записать в норм. виде:
$$\begin{cases}\frac{dx}{dy}=\frac{x^3+3xy^2}{2y^3} & (1)\\ \frac{dz}{dy}=\frac{z}{y} & (2)\end{cases}$$

В каждое из ур-ий входит только 2 перем. ($\Rightarrow$ не надо исключать переменные)

Решим оба ур-я.

$$(1)\Rightarrow \underbrace{2y^3}dx=\underbrace{x(x^2+3y^2)}dy$$

однородные многочлены 3-й степени $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это однородное ур-е (по перем. x, y)

Пусть $t=\frac{y}{x}\Rightarrow y=tx\Rightarrow dy=xdt+tdx$

Подставим в ур-е:

$$2t^3x^3dx=x(x^2+3t^2x^2)(xdt+tdx)$$

$$2t^3x^3dx=x^3(1+3t^2)(xdt+tdx) \quad \Big/ : x^3\neq 0 \text{ (по ОДЗ системы)}$$

$$2t^3dx=(1+3t^2)(xdt+tdx)$$

$$2t^3dx=xdt+tdx+3t^2xdt+3t^3dx$$

$$(3t^3-2t^3+t)dx=-xdt-3t^2xdt$$

$$(t^3+t)dx=-(x+3t^2x)dt$$

$$t(t^2+1)dx=-x(1+3t^2)dt$$

$$-\int\frac{dx}{x}=\int\frac{3t^2+1}{t(t^2+1)}dt$$

Разложим на простейшие дроби

$$\frac{3t^2+1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

$$3t^2+1 = A(t^2+1) + t(Bt+C)$$

$$3t^2+1 = (A+B)t^2 + Ct + A$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ C = 0 \\ B = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3t^2+1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} + \frac{2t}{t^2+1}$$

$$-\ln|x| = \ln|t| + \ln(t^2+1) + C \quad, C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\frac{1}{|x|} = \ln|t|(t^2+1)C_1 \quad, C_1 > 0$$

$$\frac{1}{x} = t(t^2+1)C_2 \quad, C_2 \neq 0$$

$$\frac{1}{x\,t(t^2+1)} = C_2$$

$$\frac{1}{\cancel{x}\cdot\frac{y}{\cancel{x}}\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)} = C_2$$

$$\frac{x^2}{y(y^2+x^2)} = C_2$$ Это 1-й интеграл системы

$$(2) \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = \ln|y| + C_3 \quad, C_3 \in \mathbb{R}$$

$$|z| = |y|C_4 \quad, C_4 > 0$$

$$z = yC_5 \quad, C_5 \neq 0$$

Можно переписать так: $\frac{z}{y} = C_5$ Это тоже 1-й интеграл

Ответ: Общий интеграл системы: $\begin{cases} \frac{x^2}{y(y^2+x^2)} = D_1 \\ \frac{z}{y} = D_2 \end{cases}$, где $D_i \neq 0$.

№3090

Решить систему ур-ий
$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему:
$$\begin{cases} y'' = -2y - 4z + e^x & (1) \\ z'' = y + 3z - x & (2) \end{cases}$$

Зам. (Обсуждение)
Такая система не явл. нормальной.
Её можно привести к норм. виду:

$$\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \ (= y_1') \\ y_3 = z \\ y_4 = z' \ (= y_3') \end{matrix} \implies \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 4y_3 + e^x \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 + 3y_3 - x \end{cases}$$

Но мы можем решить систему в ее исходном виде, используя метод исключения.

$(2) \implies y = z'' - 3z + x$

Дифференцируем 2 раза:
$$y' = z''' - 3z' + 1$$
$$y'' = z'''' - 3z''$$

Подставим y и y'' в (1): $z^{(4)} - 3z'' = -2(z'' - 3z + x) - 4z + e^x$

Упростим: $z^{(4)} - z'' - 2z = -2x + e^x$

Это неоднородное лин. ур-е с постоянными коэф-ми и специальной правой частью.

1) Решим однородное уравнение:

$z^{(4)} - z'' - 2z = 0.$

Хар. ур-е: $\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0$

Пусть $\lambda^2 = t$. Тогда

$t^2 - t - 2 = 0$

$t_1 = -1$, $t_2 = 2$

$\lambda^2 = -1$	$\lambda^2 = 2$
$\lambda = \pm i$	$\lambda = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = e^{\sqrt{2}x}$, $y_4 = {}^{-\sqrt{2}x}$

$z_{oo} = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

2) Решим неоднор ур-е. Прав. часть $f(x) = -2x + e^x$

Для прав. части $f_1(x) = -2x$

$z_{чн_1} = Ax + B$

Для прав. части $f_2(x) = e^x$

$z_{чн_2} = Ce^x$

Найдём A, B

Подставим $z_{чн_1}$ в неоднор ур-е

$z^{(4)} - z'' - 2z = -2x$:

$0 - 0 - 2(Ax + B) = -2x$

След., $A = 1$, $B = 0$

$\Rightarrow z_{чн_1} = x$

Найдём C.

Подставим $z_{чн_2}$ в неоднор. ур-е

$z^{(4)} - z'' - 2z = e^x$;

$\cancel{Ce^x} \cancel{-Ce^x} - 2Ce^x = e^x$

$-2C = 1$. След., $C = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z_{чн_2} = -\frac{1}{2}e^x$

След., $\boxed{z_{он} = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + x - \frac{1}{2}e^x}$

Подставим найденное z в $y = z'' - 3z + x$.
Сначала продифференцируем:

$$z' = C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} - C_3\sin x + C_4\cos x + 1 - \frac{1}{2}e^x$$

$$z'' = C_1 2e^{\sqrt{2}x} + C_2 2e^{-\sqrt{2}x} - C_3\cos x - C_4\sin x - \frac{1}{2}e^x$$

След.,

$$y = 2C_1e^{\sqrt{2}x} + 2C_2e^{-\sqrt{2}x} - C_3\cos x - C_4\sin x - \frac{1}{2}e^x -$$
$$-3\left(C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + C_3\cos x + C_4\sin x + x - \frac{1}{2}e^x\right) + x$$

Получим

$$\boxed{y = -C_1e^{\sqrt{2}x} - C_2e^{-\sqrt{2}x} - 5C_3\cos x - 5C_4\sin x - 2x - \frac{5}{2}e^x}$$

Ответ: $\begin{cases} y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$

ДЗ №3078, 3081, 3085, 3088(в), 3089