Занятие 9.

Интегрирование систем линейных однородных ОДУ с постоянными коэффициентами. Общее решение. Фундаментальная система решений

Опр Нормальной линейной однородной системой ОДУ n-го порядка наз система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n. \end{cases}$$

Её можно записать в матричной форме

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \qquad (1)$$

Фундаментальной системой решений системы (1) наз. совокупность n линейно независимых решений

$$Y_k(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Общее решение системы имеет вид

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x),$$ где

$Y_k(x)$ – ФСР системы.

Частный случай: $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, т.е. коэф-ты не зависят от x.

В общем случае систему (1) можно решать методом исключения.

В частном случае $A(x)=A$ (матрица с постоянными коэф-ми) можно исп. методы линейной алгебры.

Рас. матричное ур-е $AY(x)=Y'(x)$ как запись действия лин. оператора, A – матрица оператора. След., можно найти её собств. векторы и собств. значения.

1) Решим хар. ур-е $|A-\lambda E|=0$.
Его корни – соб. значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $s \le n$
(нек. корни могут иметь кратность >1)
2) Найдём соб. векторы $U^{(\lambda_k)}(x)$ $\forall \lambda_k$.

Тогда общее решение системы
$$Y(x)=C_1 Y^{(\lambda_1)}(x)+\ldots+C_s Y^{(\lambda_s)}(x),$$
где $Y^{(\lambda_k)}(x)$ – частные решения (ФСР), соотв. λ_k. Как их найти?

Случаи.

1) λ – действит. корень кратности 1. Пусть $U^{(\lambda)}$ – соб. вектор матрицы A, соотв. соб. значению λ.
Тогда $Y^{(\lambda)}(x)=U^{(\lambda)}e^{\lambda x}=\begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda x}$

2) λ – действит. корень кратности $r \geq 2$.
Тогда $Y^{(\lambda)}(x)=\left[\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(2)} \end{pmatrix}x+\ldots+\begin{pmatrix} \alpha_1^{(r)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(r)} \end{pmatrix}x^{r-1}\right]e^{\lambda x}$,

где коэф-ты $\alpha_i^{(j)}$ можно найти, подставив $Y^{(\lambda)}(x)$ в исходную систему.

3 λ - комплексный корень кратности 1

($\Rightarrow \bar{\lambda}$ - тоже корень)

Найдём $Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\bar{\lambda})}(x)$ как в п. 1.

Вместо них надо брать

$$Y_1^{(\lambda)}(x) = \mathrm{Re}\, Y^{(\lambda)}(x),$$

$$Y_2^{(\lambda)}(x) = \mathrm{Im}\, Y^{(\lambda)}(x).$$

Пример 1.

Решить систему ур-ий

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 & (1) \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 & (2) \\ y_3' = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 & (3) \end{cases}$$

Это нормальная линейная однородная система ОДУ 3-го порядка с постоянн. коэф-ми. Её можно решить методом исключения, но мы рас. новый способ.

Решение.

I сп. Методами лин. алгебры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдём соб. числа матрицы A.

1) Хар. ур-е : $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)^2(2-\lambda) - 3(4-\lambda) = 0$$

$$(4-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda) - 3) = 0$$

$$(4-\lambda)(8-6\lambda+\lambda^2-3) = 0 \longrightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 5$$

Различные действит. корни (крат. 1)

2) Соб. векторы.

Для $\lambda_1 = 1$.

$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ однородная сист. ур-ий.

$$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 4-1 & 1 & 0 \\ 3 & 2-1 & 0 \\ 2 & 3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot(-2) + \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 3 \end{pmatrix} : 7 \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = +\frac{3}{7} y_3 \\ y_2 = -\frac{9}{7} y_3 \\ y_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} D, \quad D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Возьмём, напр., соб. вектор $U^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_2 = 4$ аналог. найдём $U^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_3 = 5$ аналог. найдём $U^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) ФСР:

$$Y^{(\lambda_1)}(x) = U^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{x}$$

$$Y^{(\lambda_2)}(x) = U^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

$$Y^{(\lambda_3)}(x) = U^{(\lambda_3)} e^{\lambda_5 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x}$$

След., $Y(x) = C_1 Y^{(\lambda_1)} + C_2 Y^{(\lambda_2)} + C_3 Y^{(\lambda_3)}$

общее решение однородн. системы

$$Y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x},$$ т.е.

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 3e^{x} + C_3 e^{5x} \\ y_2(x) = -C_1 9e^{x} + C_3 e^{5x} \\ y_3(x) = C_1 7e^{x} + C_2 e^{4x} + C_3 5e^{5x} \end{cases} \longleftarrow \text{Ответ:}$$

II сп. Методом исключения.

$(1) \Rightarrow y_2 = y_1' - 4y_1$

Дифф: $y_2' = y_1'' - 4y_1'$

Подст. в (2): $y_1'' - 4y_1' = 3y_1 + 2(y_1' - 4y_1)$

$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$ однор. ур-е.

Хар. ур-е:

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 5$

$\Rightarrow$ ФСР: $y_1^{(1)} = e^{x} \qquad y_1^{(2)} = e^{5x}$

общее реш: $\boxed{y_1 = D_1 e^{x} + D_2 e^{5x}}$

Подст. в y_2:

$\boxed{y_2} = y_1' - 4y_1 = (D_1 e^{x} + D_2 e^{5x})' - 4(D_1 e^{x} + D_2 e^{5x}) =$

$= D_1 e^{x} + 5D_2 e^{5x} - 4D_1 e^{x} - 4D_2 e^{5x} =$

$\boxed{= -3D_1 e^{x} + D_2 e^{5x}}$

Подст. y_1 и y_2 в (3):

$\boxed{6}$

$y_3' - 4y_3 = 2y_1 + 3y_2$

$y_3' - 4y_3 = 2(D_1e^x + D_2e^{5x}) + 3(-3D_1e^x + D_2e^{5x})$

$y_3' - 4y_3 = -7D_1e^x + 5D_2e^{5x}$ (4)

Однор. ур-е: $y_3' - 4y_3 = 0$

Хар. ур-е: $\lambda - 4 = 0$

$\lambda = 4 \Rightarrow$ ФСР: $y_3 = e^{4x}$

общ. реш. однор. ур-я $(y_3)_{oo} = D_3e^{4x}$

<u>Для прав. части $f_1(x) = -7D_1e^x$</u>

$(y_3)_{чн_1} = A_1e^x$

Найдём A_1; для этого подставим $(y_3)_{чн_1}$ в неодн. ур-е $y_3' - 4y_3 = -7D_1e^x$

$A_1e^x - 4A_1e^x = -7D_1e^x \quad /: e^x$

$-3A_1 = -7D_1 \Rightarrow A_1 = \frac{7}{3}D_1$

След., $(y_3)_{чн_1} = \frac{7}{3}D_1e^x$

<u>Для прав. части $f_2(x) = 5D_2e^{5x}$</u>

$(y_3)_{чн_2} = A_2e^{5x}$

Найдём A_2; для этого подставим $(y_3)_{чн_2}$ в неодн. ур-е $y_3' - 4y_3 = 5D_2e^{5x}$

$5A_2e^{5x} - 4A_2e^{5x} = 5D_2e^{5x} \quad /: e^{5x}$

$A_2 = 5D_2$

След., $(y_3)_{чн_2} = 5D_2e^{5x}$

Следовательно, общее решение неодн. ур-я (4):

$$y_3 = D_3 e^{4x} + \frac{7}{3} D_1 e^x + 5 D_2 e^{5x}$$

Мы получили:

$$\begin{cases} y_1(x) = D_1 e^x + D_2 e^{5x} \\ y_2(x) = -3D_1 e^x + D_2 e^{5x} \\ y_3(x) = \frac{7}{3} D_1 e^x + 5D_2 e^{5x} + D_3 e^{4x} \end{cases}$$

Ответы при решении обоими способами совпадают (при переобозначении $D_1 = 3C_1$, $D_2 = C_3$, $D_3 = C_2$)

Пример 2

Решить систему ур-ий:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

Решение методом линейной алгебры.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Найдём соб. числа матрицы A.

Хар. ур-е $|A - \lambda E| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = 0$

$12 - 8\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$(\lambda - 4)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 4$ корень кратности 2.

2) Ищем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} x \right] e^{4x}$$

$\parallel$

$y^{(\lambda)}(x)$

Чтобы найти a, c, b, d, подставим $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ в исходную систему.

$$\begin{cases} \left((a+bx)e^{4x}\right)' = 2(a+bx)e^{4x} - (c+dx)e^{4x} \\ \left((c+dx)e^{4x}\right)' = 4(a+bx)e^{4x} + 6(c+dx)e^{4x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} be^{4x} + (a+bx)4e^{4x} = 2(a+bx)e^{4x} - (c+dx)e^{4x} \\ de^{4x} + (c+dx)4e^{4x} = 4(a+bx)e^{4x} + 6(c+dx)e^{4x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4a+b+4bx)e^{4x} = 2(a+bx)e^{4x} - (c+dx)e^{4x} \\ (4c+d+4dx)e^{4x} = 4(a+bx)e^{4x} + 6(c+dx)e^{4x} \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на e^{4x}.

Получим:

$$\begin{cases} 4a+b+\underline{4bx} = 2a + \underline{2bx} - c - \underline{dx} \\ 4c+d+\underline{4dx} = 4a + \underline{4bx} + 6c + \underline{6dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+b = 2a-c \\ 4c+d = 4a+6c \\ 4b = 2b-d \\ 4d = 4b+6d \end{cases} \quad \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = -2a-b \\ d = -2b \end{cases} \quad \begin{cases} a = C_1 \\ b = C_2 \\ c = -2C_1 - C_2 \\ d = -2C_2 \end{cases}$$

Получим общее решение

$$Y(x) = Y^{\lambda}(x) = \left(\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 - C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -2C_2 \end{pmatrix} x\right) e^{4x}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = (C_1 + C_2 x) e^{4x} \\ y_2 = ((-2C_1 - C_2) - 2C_2 x) e^{4x} \end{cases} \leftarrow \text{Ответ:}$$

Пример. 3.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Найдём собств. числа матрицы A.

Хар. ур-е $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) + 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{9-13}}{2} = 3 \pm \sqrt{-4} =$$

$$= 3 \pm 2i$$ Некратные комплексные корни, сопряженные

2) Соб. векторы (комплексные)

<u>Для $\lambda_1 = 3+2i$</u>

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 4-(3+2i) & -1 \\ 5 & 2-(3+2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-2i}{5} \\ 1-2i & -1 \end{pmatrix} \cdot(-1+2i) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) C_1 \\ y_2 = C_1 \end{cases}$$

$$u^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} y_1 = (1+2i) D_1 \\ y_2 = 5 D_1 \end{cases}, \; D_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

<u>Для $\lambda_2 = 3-2i$</u> (<u>Достаточно</u>! найти только один соб. вектор $u^{(\lambda_1)}(x)$)

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 4-(3-2i) & -1 \\ 5 & 2-(3-2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+2i}{5} \\ 1+2i & -1 \end{pmatrix} \cdot(-(1+2i)) \sim +$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right) y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right) C_2 \\ y_2 = C_2 \end{cases}$$

$$u^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 5 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} y_1 = (1-2i) D_2 \\ y_2 = 5 D_2 \end{cases}, \; D_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

След. соб. вектора:

$$u^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 5 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\varphi^{(\lambda_1)} = u^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(1+2i)x}$; $\varphi^{(\lambda_2)} = u^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(1-2i)x}$

Распишем подробнее:

$$Y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix}1+2i\\5\end{pmatrix}e^x(\cos 2x+i\sin 2x)=e^x\begin{pmatrix}(1+2i)(\cos 2x+i\sin 2x)\\5(\cos 2x+i\sin 2x)\end{pmatrix}=$$

$$=e^x\begin{pmatrix}(\cos 2x-2\sin 2x)+i(\sin 2x+2\cos 2x)\\5\cos 2x\quad+i\,5\sin 2x\end{pmatrix}$$

Возьмём $Y_1^{(\lambda_1)}=\operatorname{Re}Y^{(\lambda_1)}=e^x\begin{pmatrix}\cos 2x-2\sin 2x\\5\cos 2x\end{pmatrix}$

$Y_2^{(\lambda_1)}=\operatorname{Im}Y^{(\lambda_1)}=e^x\begin{pmatrix}\sin 2x+2\cos 2x\\5\sin 2x\end{pmatrix}$

$$Y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix}1-2i\\5\end{pmatrix}e^x(\cos 2x-i\sin 2x)=e^x\begin{pmatrix}(1-2i)(\cos 2x-i\sin 2x)\\5\cdot(\cos 2x-i\sin 2x)\end{pmatrix}=$$

$$=e^x\begin{pmatrix}(\cos 2x-2\sin 2x)+i(-2\cos 2x-\sin 2x)\\5\cos 2x\quad-i\,5\sin 2x\end{pmatrix}$$

Возьмём $Y_1^{(\lambda_2)}=\operatorname{Re}Y^{(\lambda_2)}=e^x\begin{pmatrix}\cos 2x-2\sin 2x\\5\cos 2x\end{pmatrix}$

$Y_2^{(\lambda_2)}=\operatorname{Im}Y^{(\lambda_2)}=e^x\begin{pmatrix}-2\cos 2x-\sin x\\-5\sin 2x\end{pmatrix}$

Мы видим, что $Y_1^{(\lambda_2)}=Y_1^{(\lambda_2)}$, а $Y_2^{(\lambda_2)}=-Y_2^{(\lambda_2)}$

След., в дальнейшем будем находить Y_1, Y_2 только для одного из комплексно-сопряженных корней.

Общее решение $Y(x)=C_1Y_1^{(\lambda_1)}+C_2Y_2^{(\lambda_1)}$, т.е.

$$Y(x)=C_1e^x\begin{pmatrix}\cos 2x-2\sin 2x\\5\cos 2x\end{pmatrix}+C_2e^x\begin{pmatrix}\sin 2x+2\cos 2x\\5\sin 2x\end{pmatrix}$$

т.е. $\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2 e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) \\ y_2(x) = C_1 e^x 5\cos 2x + C_2 e^x 5\sin 2x \end{cases}$

$C_i \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\uparrow$

$\boxed{\text{Д/З: № 9.432, 9.434, 9.436}}$

Сборник задач по мат-ке для ВТУЗов в 4 частях часть 2 под общей редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича Москва 2010

Зам. $\exists$ другие обозначения:
вместо x – переменная t,
вместо $y_1, \ldots, y_n$ – переменные $x_1, \ldots, x_n$ или $x, y, z \ldots$;
производная по t обозначается не штрихом, а точкой: напр., вместо $x'(t), y'(t)$ – $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$.

№9.431

Решить систему ур-ий: $\begin{cases} \dot{x} = y & (1) \\ \dot{y} = -2x+3y & (2) \end{cases}$

Решение.

I сп. Методом исключения.

$(1) \Rightarrow y = \dot{x}$

Дифф.: $\dot{y} = \ddot{x}$

Подставим y и $\dot{y}$ в (2).

$$\ddot{x} = -2x + 3\dot{x}$$

$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ Это однор. лин. ур-е с пост. коэф.

Хар. ур-е:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$\Rightarrow$ ФСР: $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{2t}$

общее решение:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Найдём y.

$$y = \dot{x} = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$$

Получили:

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

т.е. $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \right)$

II сп. Методом лин. алгебры

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Соб. числа:

Хар. ур-е $|A-\lambda E|=0$ $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-\lambda(3-\lambda)+2=0$

! такое же хар. ур-е как в I способе $\rightarrow$ $\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

соб. числа

2) Соб. векторы.

Для $\lambda_1 = 1$

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x-y=0$$

$$\begin{cases} x=y \\ y=y \end{cases} \quad \begin{cases} x=c_1 \\ y=c_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{u_1(t)} C$$

$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Для $\lambda_2 = 2$

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad -2x+y=0$$

$$\begin{cases} y=2x \\ x=x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{u_2(t)} D,$$

$D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) ФСР: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

Общее решение: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$

т.е. $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: ↑.

№9.433

$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x + 7y \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$

Решение.

I сп. Метод исключений.

II сп. Метод лин. алгебры

(1) Найдём общее решение системы.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

1) Соб. числа.

Хар. ур-е $|A - \lambda E| = 0$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda)(7-\lambda) + 8 = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$

$D = 100 - 4 \cdot 29 = 4(25 - 29) = -16$

$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i$ (комплексные сопряженные)

2) Соб. векторы (комплексные)

Для $\lambda_1 = 5 + 2i$

$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix}3-(5+2i) & -2\\ 4 & 7-(5+2i)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-2i & -2\\ 4 & 2-2i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+i & 1\\ 2 & 1-i\end{pmatrix}^{\cdot(1-i)}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 2 & 1-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 1-i\end{pmatrix}\qquad 2x+(1-i)y=0$$

$$y=\frac{2x}{-1+i}=$$

$$=\frac{2x(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2x(-1-i)}{2}=(-1-i)x$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}C \qquad \text{Возьмём } u^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}$$

$C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Downarrow$$

$$u^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix}1\\ -1+i\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ФСР}:\ y^{(\lambda_1)}=u^{(\lambda_1)}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}$$

$$y^{(\lambda_2)}=u^{(\lambda_2)}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\ -1+i\end{pmatrix}e^{(5-2i)t}$$

Распишем подробнее:

$$y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)e^{5t}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t+i\sin 2t\\ -\cos 2t+\sin 2t-i(\sin 2t+\cos 2t)\end{pmatrix}$$

$$y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix}1\\ -1+i\end{pmatrix}(\cos 2t-i\sin 2t)e^{5t}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t-i\sin 2t\\ -\cos 2t+\sin 2t+i(\sin 2t+\cos 2t)\end{pmatrix}$$

Возьмём $Y_1^{(\lambda_1)} = \operatorname{Re} Y^{(\lambda_1)} = e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$

$$Y_2^{(\lambda_1)} = \operatorname{Im} Y^{(\lambda_1)} = e^{5t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix}$$

Зам.
Для $Y^{(\lambda_2)}$ не будем находить $\operatorname{Re} Y^{(\lambda_2)}$ и $\operatorname{Im} Y^{(\lambda_2)}$.

$$\operatorname{Re} Y^{(\lambda_2)} = \operatorname{Re} Y^{(\lambda_1)}, \quad \operatorname{Im} Y^{(\lambda_2)} = -\operatorname{Im} Y^{(\lambda_1)}$$

Общее решение:

$Y(t) = C_1 Y_1^{(\lambda_1)} + C_2 Y_2^{(\lambda_1)}$, т.е.

$$Y(t) = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix}$$

можно вынести за скобки e^{5t}

т.е.

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t}\cos 2t + C_2 e^{5t}\sin 2t \\ y(t) = C_1 e^{5t}(-\cos 2t + \sin 2t) + C_2 e^{5t}(-\sin 2t - \cos 2t) \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

② Решим задачу Коши с н.у. $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Подставим в общее решение $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ y(0) = C_1 \cdot (-1) + C_2(-1) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 = -1 \end{cases}$$

Получим частное решение:

$$\begin{cases} \boxed{x(t) =} e^{5t}\cos 2t - e^{5t}\sin 2t \boxed{= e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t)} \\ \boxed{y(t) =} e^{5t}(-\cancel{\cos 2t} + \sin 2t) - e^{5t}(-\sin 2t - \cancel{\cos 2t}) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{= 2e^{5t}\sin 2t}$$

Ответ:

№ 9.435

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

Решение

I сп. Метод исключения

II сп. Метод лин. алгебры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Соб. числа.

Хар. ур-е $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-\lambda)(3+\lambda) + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda+1)^2 = 0$$

$\lambda = -1$ кратн. 2 действит. корень

2) Ищем решение в виде

$$\varphi^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} t \right] e^{-1 \cdot t}$$

Чтобы найти a, c, b, d, подставим $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в исходную систему:

$$\begin{cases} \left((a+bt)e^{-t}\right)' = (a+bt)e^{-t} - 4(c+dt)e^{-t} \\ \left((c+dt)e^{-t}\right)' = (a+bt)e^{-t} - 3(c+dt)e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b e^{-t} + (a+bt)(-1)e^{-t} = ((a+bt) - 4(c+dt))e^{-t} & \Big| : e^{-t} \\ d e^{-t} + (c+dt)(-1)e^{-t} = ((a+bt) - 3(c+dt))e^{-t} & \Big| : e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{b-a} - bt = \underline{a} + bt \underline{-4c} - 4dt \\ d - c - dt = a + bt - 3c - 3dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - a = a - 4c \\ -b = b - 4d \\ d - c = a - 3c \\ -d = b - 3d \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b + 4c = 0 \\ -2b + 4d = 0 \\ -a + 2c + d = 0 \\ -b + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2c - d = 0 \\ b - 2d = 0 \\ -2a + b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2c + d \\ b = 2d \\ c = c \\ d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2$$

Получим общее решение:

$$Y(t) = Y^{1}(t) = \left[\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_2 \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 \right) t \right] e^{-t}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = (2C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{-t} \\ y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} \end{cases}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Ответ: