Семинар 1 по интегралам

Первообразная функции. Неопределённый интеграл.

Опр. Функция $F(x)$ наз. первообразной ф-ции $f(x)$ на множестве M, если $\forall x \in M \quad F'(x) = f(x)$.

Неопределённым интегралом ф-ции $f(x)$ наз. мн-во всех её первообразных.

Обозн. $\int f(x)dx$.

Из теории: $$\int f(x)dx = \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{одна из первообр.} \\ \text{ф-ции } f(x)}}{F(x)} + C}_{\substack{\text{все первообр.} \\ \text{ф-ции } f(x)}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Основные свойства.

1. $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
2. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad \forall A \in \mathbb{R}$
3. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Сл. $\int (Af(x)+Bg(x))dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$
$\forall A, B \in \mathbb{R}$

Основные табличные интегралы

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1$

Частный случай:

$\int dx = x + C$

Док-во. $F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} x^n = x^n = f(x)$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Док-во.

$F'(x) = (\ln|x|)' = \begin{cases} x>0 & (\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x) \\ x<0 & (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f(x) \end{cases}$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Частный случай:

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

8) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

9) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

Частный случай:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

Частный случай:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

12) $$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0 \\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0 \end{aligned}\right\}$$ „высокий логарифм"

13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \underset{A}{a^2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \underset{A}{a^2}}\right| + C, \quad a \neq 0$$ „длинный логарифм"

14) $$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

15) $$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

16) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

17) $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

Д/З I. Док-во для всех табличных интегралов 1 – 17. Выучить 1 – 17.

Непосредственное интегрирование (по таблице)

№1032

$$\int(6x^2+8x+3)dx = 6\int x^2dx + 8\int x\,dx + 3\int dx =$$

$$= \cancel{6}^{2}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{8}^{4}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + 3x + C = 2x^3+4x^2+3+C$$

№1040

$$\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\frac{x\cdot -x^2-2}{x^{2/3}}dx =$$

$$= \int\left(\frac{x}{x^{2/3}} - \frac{x^2}{x^{2/3}} - \frac{2}{x^{2/3}}\right)dx = \int\left(x^{3\frac{1}{3}} - x^{1\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx =$$

$$= \int x^{3\frac{1}{3}}dx - \int x^{1\frac{1}{3}}dx - 2\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{3\frac{1}{3}+1}}{3\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{1\frac{1}{3}+1}}{1\frac{1}{3}+1} - 2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{4\frac{1}{3}}}{4\frac{1}{3}} + \frac{x^{2\frac{1}{3}}}{2\frac{1}{3}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{13}x^4\cdot\sqrt[3]{x} - \frac{7}{3}x^2\cdot\sqrt[3]{x} - 6\cdot\sqrt[3]{x} + C$$

$\boxed{\text{Д/З II № 1033, 1035, 1041}}$

№1044.

$$\int \frac{dx}{x^2-10} = \int \frac{dx}{x^2-\sqrt{10}^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$$

$\boxed{a=\sqrt{10}}$, табл. инт-л 12

№1046

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} + C$$

$\boxed{a=2\sqrt{2}}$, табл. инт-л 11

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3+1} + C$$

табл. инт-л 3

Д/З III № 1043
1045.

„Подведение под знак дифф-ла"

Метод замены перем. (подстановки)

Св-во.

$$\left.\begin{array}{l}\int f(x)dx = F(x)+C \\ u=\varphi(x) - \text{дифф. ф-я}\end{array}\right\} \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C,$$

т.е.

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$$

Как использовать:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = [u=\varphi(x)] =$$

$$= \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$$

Преобразование $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$ называют <u>подведением под знак дифференциала</u>.

Дифференциал dx можно преобразовать также, пользуясь св-ми дифф-ла и таблицей производных.

Таблица преобразования дифференциалов

1. $dx = d(x \pm a)$

Использование. $\int f(x+a)dx = \int f(x+a)d(x+a) =$
$= [u = x+a] = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(x+a) + C$

2. $dx = \frac{1}{a} d(ax)$

Исп. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) = [u = ax] =$
$= \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C$

Сл. $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$

3. $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$

Частные случаи:

$x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$ $\qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d(\sqrt{x})$

$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$ $\qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$

Исп. $\int f(x^{n+1})x^n dx = \frac{1}{n+1}\int f(x^{n+1})\,d(x^{n+1}) =$

$= [u = x^{n+1}] = \frac{1}{n+1}\int f(u)\,du = \frac{1}{n+1}F(u) + C = \frac{1}{n+1}F(x^{n+1}) +$
$+ C$

4. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$

Исп. $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x) = [u = \ln x] =$
$= \int f(u)\,du = F(u) + C = F(\ln x) + C$

5. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$, $a>0, a\neq 1$

Частный случай:

$e^x dx = d(e^x)$

Исп. $\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) de^x = [u = e^x] =$

$= \int f(u) du = F(u) + C = F(e^x) + C$

6. $\sin x\, dx = -d(\cos x)$

Исп. $\int f(\cos x) \sin x\, dx = -\int f(\cos x)\, d\cos x =$

$= [u = \cos x] = -\int f(u) du = -F(u) + C = -F(\cos x) + C$

7. $\cos x\, dx = d\sin x$

Исп. $\int f(\sin x) \cos x\, dx = \int f(\sin x)\, d\sin x =$

$= [u = \sin x] = \int f(u) du = F(u) + C = F(\sin x) + C$

8. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$

Исп. $\int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx = \int f(\operatorname{tg} x)\, d\operatorname{tg} x = [u = \operatorname{tg} x] =$

$= \int f(u) du = F(u) + C = F(\operatorname{tg} x) + C$

9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

Исп. $\int \frac{f(\operatorname{ctg} x)}{\sin^2 x} dx = -\int f(\operatorname{ctg} x)\, d(\operatorname{ctg} x) = [u = \operatorname{ctg} x] =$

$= -\int f(u) du = -F(u) + C = -F(\operatorname{ctg} x) + C$

10. $\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}d(\operatorname{arctg}\frac{x}{a})=-\frac{1}{a}d(\operatorname{arcctg}\frac{x}{a})$, $a\neq 0$

Частный случай:

$$\frac{dx}{1+x^2}=d\operatorname{arctg}x=-d(\operatorname{arcctg}x)$$

Исп. $\int\frac{f(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}dx=\int f(\operatorname{arctg}x)d(\operatorname{arctg}x)=\ldots$

$\int\frac{f(\operatorname{arcctg}x)}{1+x^2}dx=-\int f(\operatorname{arcctg}x)d(\operatorname{arcctg}x)=\ldots$

11. $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=d(\arcsin\frac{x}{a})=-d(\arccos\frac{x}{a})$, $a>0$

Частный случай:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)=-d(\arccos x)$$

Исп. $\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)=\ldots$

$\int\frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int f(\arccos x)d(\arccos x)=\ldots$

12. $\operatorname{sh}x\,dx=d(\operatorname{ch}x)$

Исп. $\int f(\operatorname{ch}x)\operatorname{sh}x\,dx=\int f(\operatorname{ch}x)\,d\operatorname{ch}x=\ldots$

13. $\operatorname{ch}x\,dx=d(\operatorname{sh}x)$

Исп. $\int f(\operatorname{sh}x)\operatorname{ch}x\,dx=\int f(\operatorname{sh}x)\,d\operatorname{sh}x=\ldots$

и т.д.

≈ №1062.

$$\int\sqrt{2-5x}\,dx=\int(-5x+2)^{\frac12}dx=\left[dx=-\frac15 d(-5x+2)\right]=$$

$$=-\frac15\int(-5x+2)^{\frac12}d(-5x+2)=\left[u=-5x+2\right]=$$

$$=-\frac15\int u^{\frac12}du=-\frac15\,\frac{u^{\frac12+1}}{\frac12+1}+C=-\frac15\,\frac{u^{\frac32}}{\frac32}+C=$$

$$=-\frac15\,\frac{(-5x+2)^{\frac32}}{\frac32}+C=-\frac{2}{15}(-5x+2)\sqrt{-5x+2}+C=$$

$$=-\frac{2}{15}(2-5x)\sqrt{2-5x}+C$$

Рассуждение „в рамочке" можно пропускать.

№1064.

$$\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int x^{-\frac12}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac12}}{\frac12}+\int\ln x\,d(\ln x)=$$

$$=\left[u=\ln x\right]=2\sqrt{x}+\int u\,du=2\sqrt{x}+\frac{u^2}{2}+C=$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

можно пропускать

№1063

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{f(x^2)} x\,dx = \left[x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) =$$

$$\boxed{= [u = x^2+1] = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

можно пропускать

Д/З IV №1062 для $a=-3$, $b=-5$

√ Решите: а) $\int (2x+3)^{100}dx$

б) $\int \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}dx$

№1077.

≈ №1080

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}} = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{16-(x^2)^2}}}_{f(x^2)} x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,d(x^2) =$$

$$= [u = x^2] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4} + C$$

Д/З V №1081, 1082

Указ. $x^2 = \frac{1}{3}d(x^3)$; $x^6 = (x^3)^2$

№1083

$$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sqrt{\arcsin x}\, d(\arcsin x) =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\arcsin x}^{\,3} + C$$

ДЗ $\underline{\text{VI}}$ №1084. Указ. $\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4(1+(\frac{x}{2})^2)}$

№1093

$$\int \underbrace{e^{-(x^2+1)}}_{f(x^2)} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-(x^2+1)} d(x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{-(x^2+1)} d(-(x^2+1)) = -\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C$$

≈№1101

$$\int \frac{5^x dx}{1+5^{2x}} = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{d(5^x)}{1+(5^x)^2} = \frac{1}{\ln 5}\operatorname{arctg}(5^x) + C$$

ДЗ $\underline{\text{VII}}$ №1095, 1096

№1104

$$\int \sin(5x+2)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+2)\,d(5x+2) =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + C$$

№1119

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| +$$
$$+ C$$

$\boxed{\text{Д/З VIII} \quad \text{№1104 для } a=-3,\ b=4;\ \text{№1105};\ \text{№1120}}$

Д/З $\overline{\text{VIII}}$ №1104 для $a=-3, b=4$

№1105

№1120