Занятие 10.

Несобственные интегралы

от неогранич. ф-ции на $(a,b]$ при $x\to a$ $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$	по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ $$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$
от неогранич. ф-ции на $[a,b)$ при $x\to b$ $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$	по бесконечному промежутку $(-\infty;b]$ $$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$
от неогранич. ф-ции на $[a,b]$ при $x\to c, c\in[a,b]$ $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$ причём должны сходиться оба интеграла	по бесконечному промежутку $(-\infty;+\infty)$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx,$$ причём должны сходиться оба интеграла.

Несобств. интеграл наз. сходящимся, если пределы (см. выше) $\exists$ и конечны, и наз. расходящимся в прот. случае.

≈ №1546, 1551, 1552.

Вычислить несобств. интегралы или установить их расходимость

1) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\underbrace{\ln 1}_{0} - \underbrace{\ln\varepsilon}_{-\infty}) =$

$= +\infty \Rightarrow$ расходится

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to +\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{b\to +\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to +\infty}(\underbrace{\ln b}_{+\infty} - \underbrace{\ln 1}_{0}) =$

$= +\infty \Rightarrow$ расходится

3) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) =$

$= +\infty \Rightarrow$ расходится

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to +\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to +\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{b}}_{0} + 1\right) =$

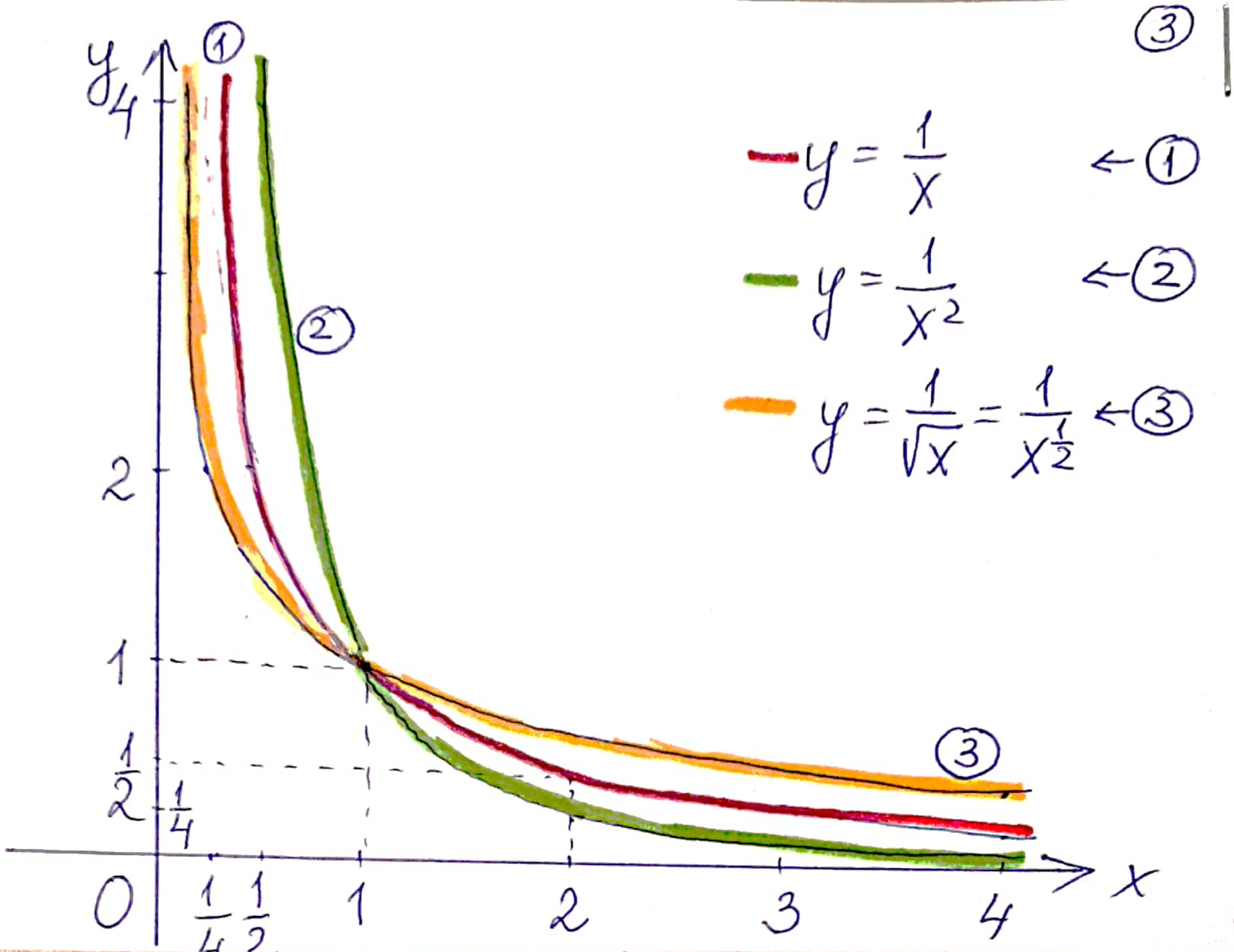
$= 1 \Rightarrow$ сходится и равен 1.

5) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{1} - \underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{0}) =$

$= 2 \Rightarrow$ сходится и равен 2.

6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{b\to +\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim\limits_{b\to +\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\lim\limits_{b\to +\infty}(\sqrt{b} - \sqrt{1}) =$

$= +\infty \Rightarrow$ расходится



Обобщение:

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha < 1 \\ \text{расх. при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha > 1 \\ \text{расх. при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_c^b \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha < 1 \\ \text{расх. при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha > 1 \\ \text{расх. при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$ $\boxed{\text{при } c < a}$

$$\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha < 1 \\ \text{расх. при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^b \frac{dx}{(c-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сх. при } \alpha > 1 \\ \text{расх. при } \alpha \leq 1 \end{cases}$$ $\boxed{\text{при } c > b}$

№ 1549.

$$I=\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

↑ обозначим, чтобы не переписывать

Функция неогранич. при $x\to 1$. Разобьём интеграл в сумму интегралов:

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = I_1+I_2$$

Оба интеграла I_1 и I_2 расходятся (см. стр. 2 внизу) $\Rightarrow$ инт. I расходится.

<u>Зам.</u> Для расходимости I достат. доказать, что расх. хотя бы один из I_i.

Док-м (не ссылаясь на с. 2), что I_1 расх.

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{(x-1)^2}\,d(x-1)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{x-1}\right|_0^{1-\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{1}-\varepsilon-\cancel{1}}-\frac{1}{0-1}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty.$$

Следов., I расх.

№1550

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$ Функция неогранич. при $x\to 1$.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right)=$$

$$=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

След., I сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

№1556

$$\int_0^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\sin x\,dx=-\lim_{b\to+\infty}\cos x\Big|_0^{b}=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}(\cos b-\underbrace{\cos 0}_{1})=\lim_{b\to+\infty}(1-\cos b)$$

Предел $\nexists$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ интеграл расходится.

№1555

может быть любое число

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+\sqrt{5}^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+\sqrt{5}}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+\sqrt{5}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+\sqrt{5}^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+\sqrt{5}^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b=$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5} - \operatorname{arctg}\frac{a+2}{\sqrt5}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt5}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{\sqrt5} - \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\cancel{\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\pi}{2} - \cancel{\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt5}.$$

№1558 ф-я неогр. при $x\to0$.

$$\int_0^{\frac12}\frac{dx}{x\ln^2x} = \int_0^{\frac12}\frac{d\ln x}{\ln^2x} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{\frac12}\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_\varepsilon^{\frac12} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\ln\frac12} - \frac{1}{\underbrace{\ln\varepsilon}_{\to-\infty}}\right) = -\left(\frac{1}{\ln(2^{-1})} - 0\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

≈№1560. В $[2;+\infty)$ нет точек, где ф-я неогр.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2x} = \int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{d\ln x}{\ln^2x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^{b} =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln 2}\right) = -\left(0 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

ДЗ I. №1547; 1554
1557; 1563
1559; 1565
; 1566
; 1562

Признаки сравнения несобств интегралов от знакопостоянных ф-ций

для неогранич. ф-ций на (a,в] при $x \to a$	по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$

Рассмотрим

$\int_a^в f(x)dx$ (1), $\int_a^в g(x)dx$ (2)	$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (1), $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (2)

„По неравенству"

Пусть

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad (*)$$

$\forall x \in (a;в]$	$\forall x \in [a;+\infty)$

Тогда

если (2) сходится, то (1) сходится,
если (1) расходится, то (2) расходится

„Предельный"

Пусть

$$f(x) \ge 0, \ g(x) \ge 0$$

$\forall x \in (a,в]$	$\forall x \in [a;+\infty)$

и $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to +\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0 \qquad (**)$

Тогда

(1) и (2) либо оба сходятся, либо оба расходятся

Зам. 1. Неравенство (*) может выполняться не на всём

$(a, b]$,	$[a; +\infty)$,

а на некотором

$(a, b_0] \subset (a, b]$	$[a_0, +\infty) \subset [a, +\infty)$.

Зам. 2 Условие (**) для $\lambda = 1$ эквив. условию (для б.б. и б.м. ф-ций)

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$	$f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$

Зам. Об интегрируемости ф-ций на любых подходящих конечных промежутках писать не будем, т.к. неинтегрируемые ф-ции в наших задачах не рассм.

Напоминание. Если ф-я непр. на $[a, b]$, то она интегрир на $[a, b]$ (т.е. $\exists$ опред. инт-л)

См. множество примеров в учебнике: Зарубин, Иванова, Кувыркин Интегральное исчисление ф-ций одного переменного (серия Мат-ка в технич. университете, VI), в главе 7.

№1571.

Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

Решение.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ неогранич. функция при $x\to 1$.

1) $f(x)\geq 0$ на $[0,1)$.

I способ. Исп. признак сравнение по неравенству

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)(1+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)\underbrace{(1+x)}_{\geq 1}\underbrace{(1+x^2)}_{\geq 1}}}<\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=g(x)$$

3) $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}dx$ сходится, т.к. $\alpha=\frac{1}{3}<1$

След., $\int_0^1 f(x)\,dx$ сходится.

$\underline{\text{II}}$ способ. $\boxed{\text{Исп. предельный признак сравнения}}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \underset{\text{при } x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+1)(1+1^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}(1-x)^{\frac{1}{3}}} = g(x)$$

3) $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ сходится, т.к. $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.

След., $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится.

№1.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{e^{\sin x}-1}{e^{\ln(1+x^2)}-1}\,dx$$

Решение. $\boxed{\text{Исп. предельный признак сравнения}}$

2) $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{e^{\ln(1+x^2)}-1} \underset{\text{при } x\to 0}{\sim} \dfrac{\sin x}{\ln(1+x^2)} \underset{\text{при } x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} = g(x)$

3) $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ расх.

Надо ещё проверить, что $f(x) \geq 0$ на $[0,1]$:

1) $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}-1}{e^{\ln(1+x^2)}-1} = \dfrac{e^{\sin x}-e^0}{e^{\ln(1+x^2)}-e^0} > 0$, т.к. $\sin x \geq 0$ и $\ln(1+x^2) \geq 0$ на $[0,1]$.

След., интеграл I расходится.

№2.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-\cos x}\,dx$$

Решение.

$\boxed{\text{Исп. предельного признак сравнения}}$

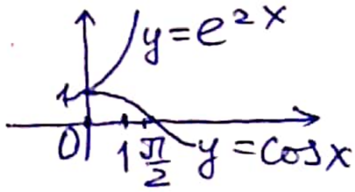
2) $$f(x)=\frac{1}{e^{2x}-\cos x}=\frac{1}{(\cancel{1}+2x+o(x))-(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}=$$

$$=\frac{1}{2x+\frac{x^2}{2}+o(x)+o(x^2)}=\frac{1}{2x+o(x)}\sim \text{ при } x\to 0$$

$$\sim\frac{1}{2x}=g(x)$$

3) $$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$$ расходится.

1) $$f(x)=\frac{1}{e^{2x}-\cos x}\geqslant 0$$ на $[0,1]$ (см. рис.)



След., I расходится

$\boxed{\text{Д/З II}}$ $$\int_0^1\frac{e^{\sin x}-1}{e^{\ln(1+x^3)}-1}\,dx;\quad \int_0^1\frac{e^{\sin x}-1}{e^{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}-1}\,dx;$$

$$\int_0^1\frac{dx}{e^{5x}-1+\sin 3x}.$$

№1570.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$$

Решение.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx}_{I_2}$$

определённый интеграл

Исследуем $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$.

1) $f(x) \geq 0$ на $[1;+\infty)$

I способ

Исп. признак сравнения по неравенству

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = g(x)$

3) $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ сходится, т.к. $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

След., $I_2 = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится

След., I сходится.

II способ. $\boxed{\text{Исп. предельный признак сравнения}}$

3) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^5}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=g(x)$,

при $x\to+\infty$

т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^5+1}\,\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^5}{x^5+1}}=$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^5}}}=\sqrt{1}=1$

4) $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\,dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ сходится $(\alpha=\frac{3}{2}>1)$.

След., $I_2=\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится

След., I сходится.

№3.

$$\int\limits_{10}^{+\infty}\frac{1}{x^5+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$$

Решение.

1) $f(x)=\frac{1}{x^5+\sqrt[3]{x^4+1}}\geq 0$ на $[10;+\infty)$

I способ $\boxed{\text{Исп. признак сравнения по неравенству}}$

2) $f(x)=\frac{1}{x^5+\sqrt[3]{x^4+1}}\leq\frac{1}{x^5}=g(x)$

3) $\int\limits_{10}^{+\infty} g(x)\,dx = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ сходится, т.к. $\alpha = 5 > 1$.

След., $\int\limits_{10}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

II способ. $\boxed{\text{Исп. признак сравнения предельный}}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + \sqrt[3]{x^4+1}} \sim \dfrac{1}{x^5} = g(x)$ при $x \to \infty$,

т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{x^5 + \sqrt[3]{x^4+1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x^{\cancel{15}\,11}} + \dfrac{1}{x^{15}}}} = 1.$

3) $\int\limits_{10}^{+\infty} g(x)\,dx = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ сходится, т.к. $\alpha = 5 > 1$

След., $\int\limits_{10}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

№4.

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^{10}}}\,dx$$

Решение.

$$I=\underbrace{\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^{10}}}\,dx}_{\substack{I_1\\ \text{определённый}\\ \text{интеграл}}}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^{10}}}\,dx}_{I_2}$$

Исследуем I_2.

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^{10}}}\geqslant 0$ на $[1;+\infty)$ $\boxed{\text{Используем пред. признак}}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[4]{1+x^{10}}}\sim\dfrac{\sqrt{x}\,\frac{\pi}{2}}{\sqrt[4]{x^{10}}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}=g(x)$ при $x\to+\infty$

3) $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\,dx=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ сход., т.к. $\alpha=\frac{3}{2}>1$.

След., I_2 сход.

След., I сходится

ДЗ III № 1567, 1572; → $\boxed{\text{Сделать номера с несоб. интегралами из подготовки к РК и свой вар. ИДЗ.}}$

Полезно $\log_a x \ll x^n \ll a^x$ при $x\to+\infty$.
и вспомнить таблицу эквивалентных функций, а также:
разложения элем. ф-ций (1-е слагаемые)

Абсолютная и условная сходимость несобственных инт-в.

Рас. несоб. инт. от неогранич. ф-ций (аналог. для несоб. инт. по неогр. промежутку):

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1) \quad и \quad \int_a^b |f(x)|dx \quad (2).$$

Опр Если (2) сх, то (1) наз. сходящимся абсолютно

Если (1) сх., а (2) расх., то (1) наз. сходящимся условно.

Признак сходимости (абсолютной).

Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

№ 1573.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Решение. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ меняет знак на $[\frac{\pi}{2}; +\infty)$.

Исследуем интеграл на абсолютную сходимость.

Рас. интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |f(x)|dx$.

1) Т.к. $|f(x)| \geq 0$, то можно исп. признаки сходимости для неотрицательных функц.

2) $|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} = g(x)$.

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ сходится, т.к. $\alpha = 2 > 1$.

След., $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится.

След., $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x)dx$ сходится (причём абсолютно).

$\boxed{\text{ДЗ IV № 1646.}}$ +см. примеры в учебнике