Занятие 11.

Длина дуги кривой

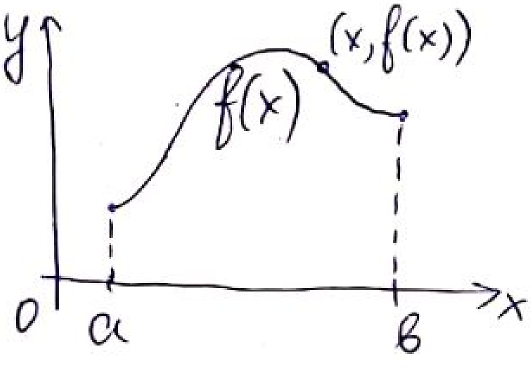
Из теории:

Пусть кривая задана

1. графиком ф-ции

$y=f(x)$, где

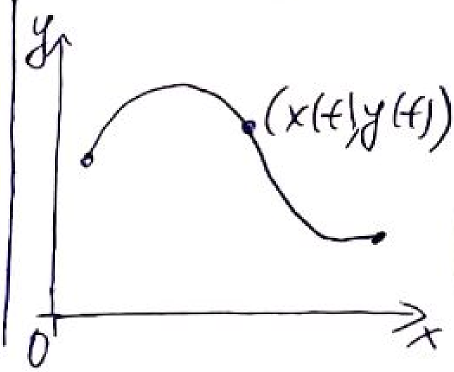
$x\in[a,b]$



2. параметрически

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, где

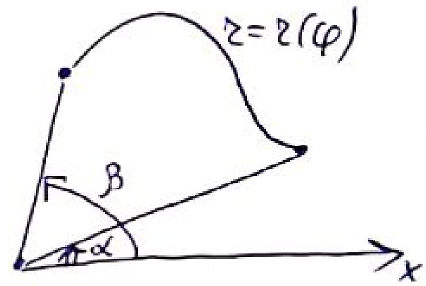
$t\in[\alpha,\beta]$



3. в полярных координатах

$r=r(\varphi)$, где

$\varphi\in[\alpha,\beta]$



Тогда длина кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Зам. 1 явл. частным случаем 2, в качестве параметра берется координата x.

Scanned by CamScanner

1

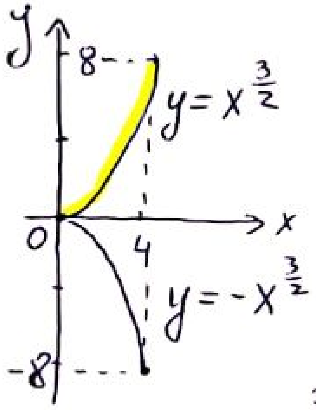
№1665

Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки с координатами $x=4$, $y=8$

Решение.

$$l=\int_0^4\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}=\frac{3}{2}\int_0^4\sqrt{\frac{4}{9}+x}\,d\left(x+\frac{4}{9}\right)=$$

Найдём $y'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'^2(x)=\frac{9}{4}x$.



По-другому: $(y^2)'=(x^3)'$

$2yy'=3x^2$

$y'=\frac{3x^2}{2y}\Rightarrow y'^2=\frac{9}{4}\frac{x^4}{y^2}=\frac{9}{4}\frac{x^4}{x^3}=\frac{9}{4}x$

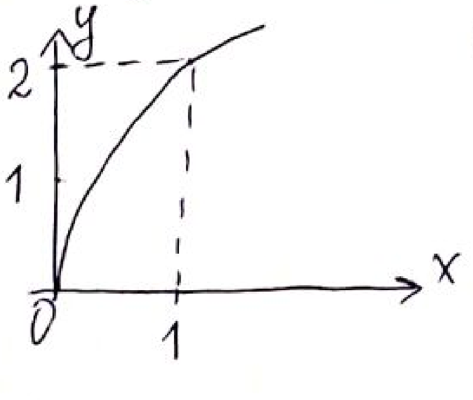
$$=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{\left(x+\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}\Bigg|_0^4=\left(4+\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{40^{3/2}-4^{3/2}}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{4^{\frac{3}{2}}(10^{\frac{3}{2}}-1)}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{8(10\sqrt{10}-1)}{27}$$ ← Ответ.

№1667.

Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=1$.

Решение.



Зам. Если решать по ф-ле $l=\int_0^1\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$, то получ. несобств. инт-л (от неогранич. ф-ции).

Решим по формуле $l=\int_0^2\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$.

$y=2\sqrt{x} \Rightarrow x=\frac{y^2}{4} \Rightarrow x'=\frac{y}{2} \Rightarrow (x')^2=\frac{y^2}{4}$.

$l=\int_0^2\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{4+y^2}\,dy=$ … выводили „по частям" $=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\sqrt{4+y^2}+\frac{4}{2}\ln|y+\sqrt{4+y^2}|\right)\Big|_0^2=$

$=\left(\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{4+2^2}+\ln|2+\sqrt{4+2^2}|\right)-$

$-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\ln|0+\sqrt{4+0^2}|\right)=$

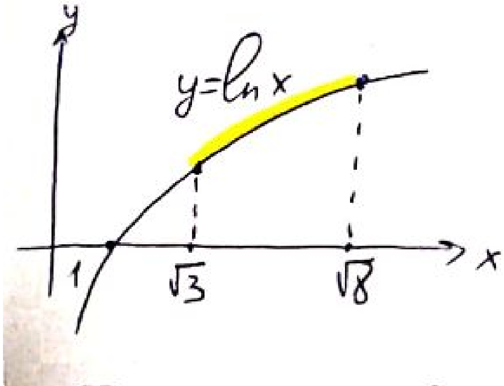
$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})-\ln 2=$

$=\sqrt{2}+\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. ← Ответ.

№1669.

Найти длину дуги кривой $y=\ln x$ от $x=\sqrt{3}$ до $x=\sqrt{8}$.

Решение.



$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\ln x)'^2}\,dx=$

$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx =$

[Пусть $x=sh\,t \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{sh^2t+1}}{sh\,t}=\frac{\sqrt{ch^2t}}{sh\,t}=\frac{ch\,t}{sh\,t}$
$dx=ch\,t\,dt$]

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} \operatorname{ch} t\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{ch}^2 t\, d\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t - 1} =$$

t_1, t_2 – новые пределы интегрир.

Пусть $\operatorname{ch} t = a$.

$$= \int_{a_1}^{a_2} \frac{a^2\,da}{a^2-1} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{a^2-1+1}{a^2-1}\,da = \int_{a_1}^{a_2} \left(1 + \frac{1}{a^2-1}\right) da =$$

$$= \left(a + \frac{1}{2} \ln \frac{a-1}{a+1}\right)\Bigg|_{a_1}^{a_2} =$$

Найдём пределы инт-я a_1, a_2.

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t \\ a = \operatorname{ch} t \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} = \sqrt{x^2+1}$$

Если $x_1 = \sqrt{3}$, то $a_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = 2$

Если $x_2 = \sqrt{8}$, то $a_2 = \sqrt{\sqrt{8}^2+1} = 3$

$$= \left(2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2-1}{2+1}\right) - \left(3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3-1}{3+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$ ← Ответ.

Зам. $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$, $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ | $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$, $\operatorname{ch}\alpha > 0$ всегда

ДЗ I. №1666, 1670.

2

№1676.

Найти длину дуги развертки окружности от $t=0$ до $t=T$

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$$

Решение.

$$l=\int_0^T \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$$

$$\begin{cases} x'=a(-\cancel{\sin t}+\cancel{\sin t}+t\cos t)=at\cos t \\ y'=a(\cancel{\cos t}-\cancel{\cos t}+t\sin t)=at\sin t \end{cases}$$

$$=\int_0^T \sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\,dt=a\int_0^T t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^T t\,dt=a\frac{t^2}{2}\Big|_0^T=\frac{aT^2}{2}\leftarrow \text{Ответ.}$$

ДЗ II №1678, 1679. → эта задача относится к след. пункту

3

№1680.

Найти всю длину кардиоиды

$r=a(1-\cos\varphi)$

Решение.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2(\varphi)}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi \ominus$$

$[r'=a\sin\varphi]$

$$\ominus a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\varphi+\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=a\sqrt{2}\sqrt{2}\cdot 2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\frac{\varphi}{2}=$$

$$=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2}=-4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\underbrace{\cos\pi-\cos 0}_{-2})=8a$$

$\varphi\in[0;2\pi]\Rightarrow\frac{\varphi}{2}\in[0,\pi]\Rightarrow\sin\frac{\varphi}{2}\geqslant 0.$

Д/З III №1683.

Д/З IV. Сделать аналог. номера из ИДЗ и подготовки к РК.
Найти и выучить рисунки часто использ. кривых (см. задачник в конце).