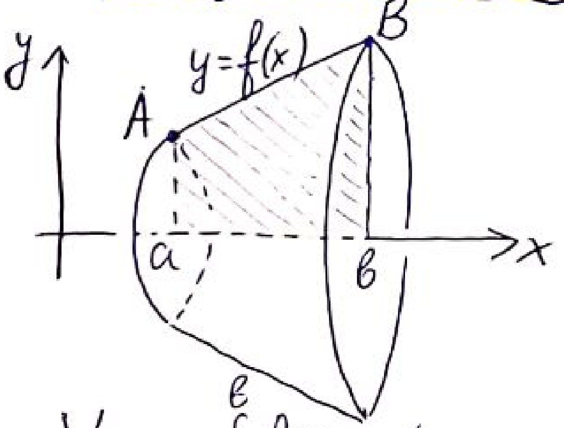
# Занятие 12.

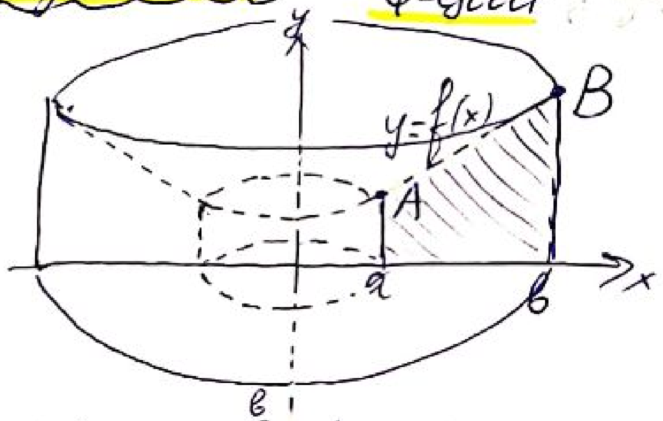
# Объёмы тел.

## I. Объёмы тел вращения

Из теории

① В декартовых координатах: кривая AB задана графиком ф-ции

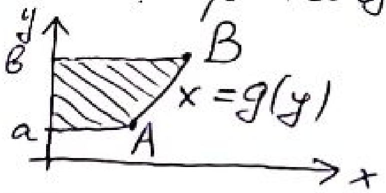



$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad V_y=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$$

(криволин. трапеция вращается вокруг $Ox$) (криволин. трапеция вращается вокруг $Oy$)

Зам. Если криволин. трапеция задана так:




то аналогично

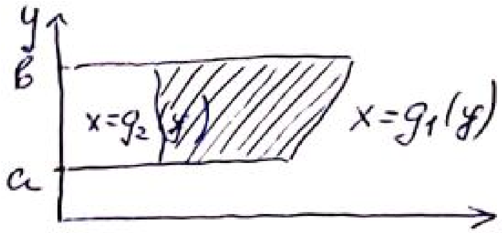
$$V_y=\pi\int_a^b g^2(y)\,dy \qquad V_x=2\pi\int_a^b y\,g(y)\,dy.$$

Зам. Если криволин. трапеция задана так:


то

$$V_x=\pi\int_a^b \left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx \qquad V_y=2\pi\int_a^b x\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

Аналог. для криволин. трапеции



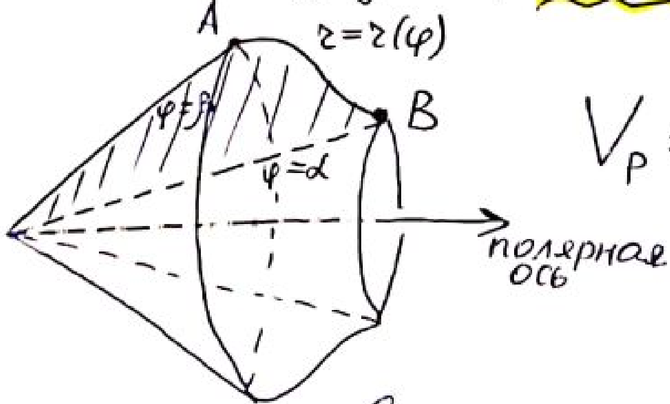

$$V_y=\pi\int_a^b\left(g_1^2(y)-g_2^2(y)\right)dy \qquad V_x=2\pi\int_a^b y\left(g_1(y)-g_2(y)\right)dy$$

② Если кривая AB задана параметрически: (см. рисунки выше)

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\quad t\in[t_1,t_2],$$

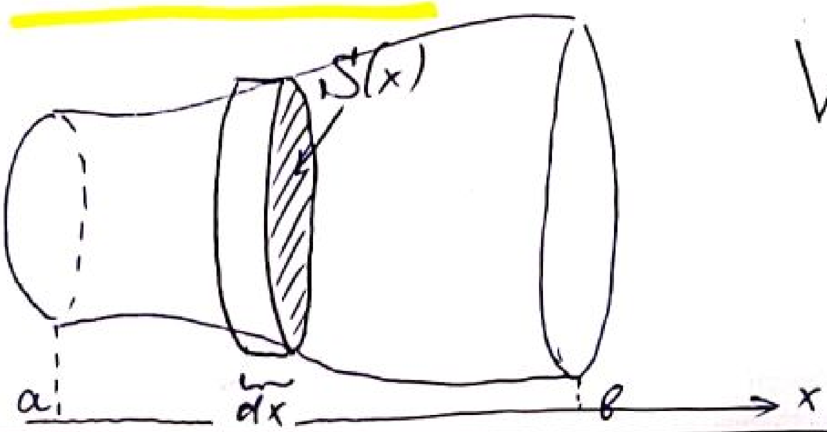
то во всех формулах надо сделать замену переменных.

③ Если кривая AB задана в полярных к-х:




$$V_p=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\,d\varphi$$

## II. Объём тела с известными поперечными сечениями.

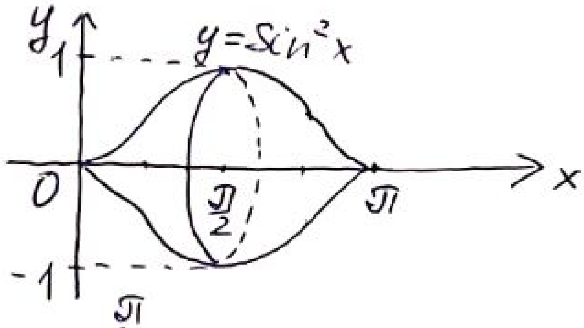



$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

№1688.

Найти $V$ тела, образованного при вращении вокруг оси $Ox$ кривой $y=\sin^2 x$ в промежутке от $x=0$ до $x=\pi$.

Решение




$$V_x=\pi\int_0^{\pi} y^2(x)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(x\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right)=$$

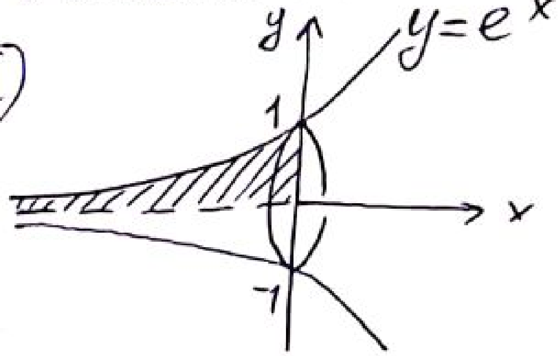
$$=\frac{\pi}{4}\left(\pi-0+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{3\pi^2}{8}$$

№1691.

Найти $V$ тела, образованного вращением площади, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=0$, $y=0$ вокруг ⓐ $Ox$, ⓑ $Oy$.

Решение.

ⓐ



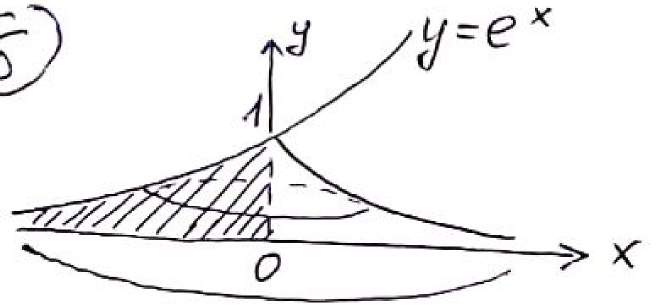

$$V_x=\pi\int_{-\infty}^{0} y^2(x)\,dx=$$

$$=\pi\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx=$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, d2x = \frac{\pi}{2} e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}(1-0) = \frac{\pi}{2}$$

(т.к. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$)

б)




$$V_y = 2\pi\int_{-\infty}^{0} x\,y(x)\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{0} x\, de^{x} = 2\pi\left(xe^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx\right) =$$

$$= 2\pi\left(xe^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}\right) =$$

$$= 2\pi\big((0-0)-(1-0)\big) = -2\pi$$

Мы получили отрицат. результат, т.к. в формуле для $V_y$ здесь выражение под интегралом $xy(x)<0$. След., либо будем брать минус перед интегралом, либо брать ответ по модулю.

След., $V_y = 2\pi$.

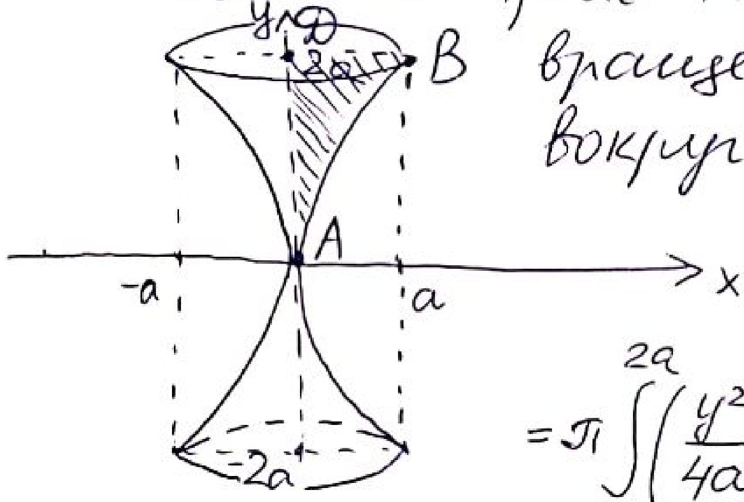
Зам. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = 0$

# №1692.

Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ той части параболы $y^2=4ax$, которая отсекается прямой $x=a$

I сп.

Решение. 1) Рас. тело как полученное вращением графика $x=\frac{y^2}{4a}$ вокруг $Oy$. Тогда




$$V_y=\pi\int_{-2a}^{2a}x^2(y)\,dy=$$

$$=\pi\int_{-2a}^{2a}\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2dy=\frac{\pi}{16a^2}\cdot\frac{y^5}{5}\Bigg|_{-2a}^{2a}=$$

$$=\frac{\pi}{16a^2\cdot5}\left(32a^5-(-32)a^5\right)=\frac{\pi\cdot2\cdot\cancel{32}^{\,2}}{\cancel{16}\,a^2\cdot5}a^5=\frac{4\pi}{5}a^3$$

Обсуждение. Этот ответ не сходится с ответом из задачника: $\frac{16\pi}{5}a^3$.

2) Найдём $V$ цилиндра радиуса $a$ и высоты $4a$, внутри которого находится рассмотренное выше тело.

$$V_{\text{цилиндра}}=S\cdot h=\pi a^2\cdot4a=4\pi a^3$$

3) Вычтем $V_{\text{цилиндра}}-V_y=4\pi a^3-\frac{4\pi}{5}a^3=$

$$=4\pi a^3\cdot\frac{4}{5}=\frac{16\pi}{5}a^3$$

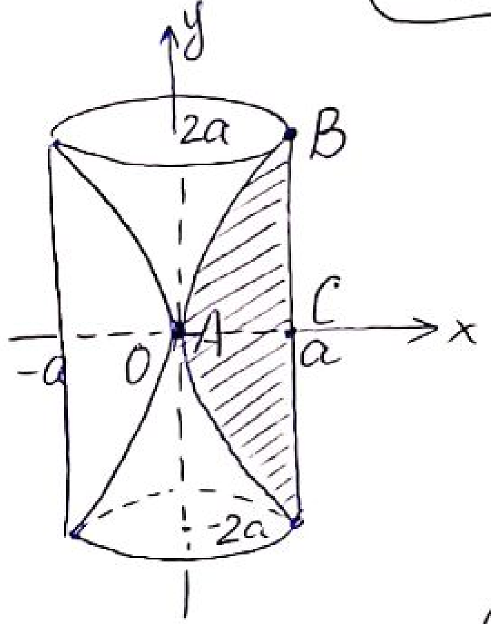
Теперь ответ сошелся.

Значит, имелось в виду другое тело: см. след. стр.

II сп.

$V_y = 2V_1$, где $V_1$ получено вращением $\triangle ABC$ вокруг $Oy$.

След., $V_y = 2\cdot 2\pi \underbrace{\int_0^a x\,y(x)\,dx}_{V_1} = 4\pi\int_0^a x\sqrt{4ax}\,dx =$




$= 4\pi\cdot 2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}dx =$

$= 8\pi\sqrt{a}\left.\dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_0^a =$

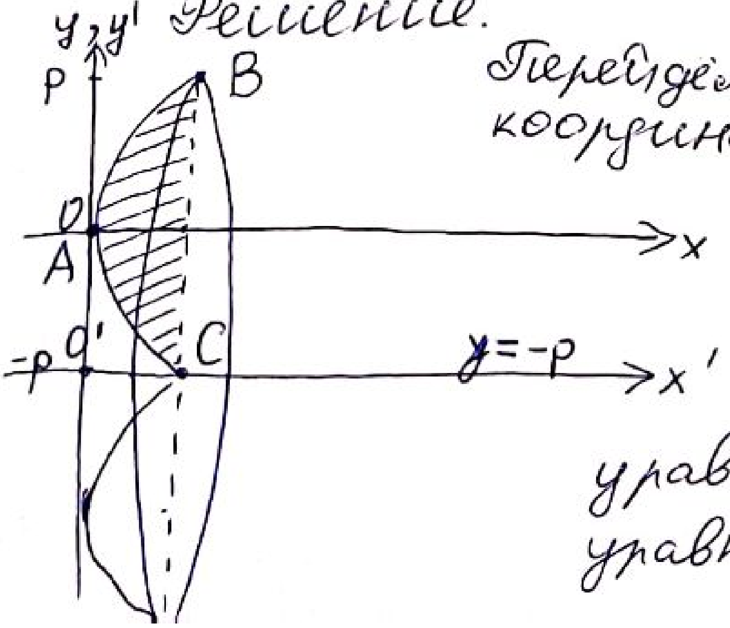
$= 8\pi\sqrt{a}\cdot\left.\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^a = \dfrac{16\pi}{5}a^3.$

Ответ: $\dfrac{16\pi}{5}a^3$

№1694.

Найти объём тела, образованного вращением вокруг прямой $y=-p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2=2px$ и прямой $x=\frac{p}{2}$

Решение.




Перейдём в новую систему координат $O'x'y'$, чтобы ось вращения была ось $O'x'$: $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+p \end{cases}$

Тогда

уравнение AB: $y'=\sqrt{2px'}+p$

уравнение AC: $y'=-\sqrt{2px'}+p$

$$V_{x'} = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(f_2^2(x') - f_1^2(x')\right) dx' =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\left(\sqrt{2px'} + p\right)^2 - \left(-\sqrt{2px'} + p\right)^2\right) dx' =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\left(\cancel{2px'} + 2\sqrt{2px'}\,p \cancel{+p^2}\right) - \left(\cancel{2px'} - 2\sqrt{2px'}\,p \cancel{+p^2}\right)\right) dx'$$

$$= \pi \int_0^{\frac{p}{2}} 4\sqrt{2px'}\,p\, dx' = 4p\sqrt{2p}\,\pi \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{x'}\, dx' = 4p\sqrt{2p}\,\pi \left.\frac{x'^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \frac{8}{3} p\sqrt{2p}\,\pi \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi p^3}{3}$$

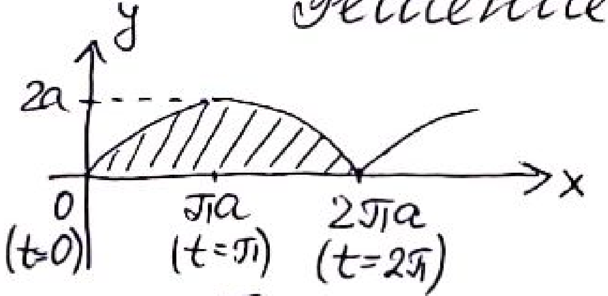
$$\boxed{\text{Д/З I. № } 1689, 1695, 1697.}$$

I ② :

№1701.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ а) вокруг $Ox$, б) вокруг $Oy$.

Решение.




а) $$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x)\, dx = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)\, x'(t)\, dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$=\pi a^3\left(t\Big|_0^{2\pi}-3\sin t\Big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cos t\,dt\right)=$$

$$=\pi a^3\left(2\pi-3\cdot 0+\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\,d\sin t\right)=$$

$$=\pi a^3\left(2\pi+\frac{3}{2}(2\pi+0)-\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\pi a^3(2\pi+3\pi-0+0)=5\pi^2a^3$$

б) $$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}x\cdot y(x)\,dx=2\pi\int_0^{2\pi}x(t)y(t)x'(t)\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt=$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)\,dt$$

$$=2\pi a^3\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}t\cos t\,dt+\int_0^{2\pi}t\,\frac{1+\cos 2t}{2}dt+\cos t\Big|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,d\cos t\right)=$$

$$=2\pi a^3\left(\frac{\cancel{4}^{2}\pi^2}{\cancel{2}}-2\left(t\sin t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\,dt\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}t\cos 2t\,d2t\right)+\right.$$

$$\left.+0-\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

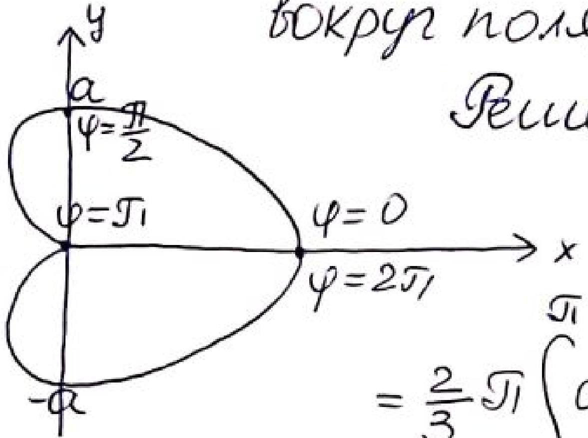
$$=2\pi a^3\left(2\pi^2-2(0+0)+\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\left(t\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,d2t\right)\right)+\right.$$

$+0+0) = 2\pi a^3(2\pi^2+\pi^2) = 6\pi^3 a^3$ Ответ: а) $5\pi^2 a^3$
б) $6\pi^3 a^3$.

$\boxed{\text{Д/З II №1702.}}$

№1703

I ③: Найти объём тела, которое получается при вращении кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.




Решение.

$$V_x = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\, d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left(\cos\varphi\Big|_0^{\pi} - 3\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \cancel{3}\frac{\cos^3\varphi}{\cancel{3}}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left((-1-\quad) - 3\cdot 0 + ((-1)-1) + \frac{1}{4}((-1)^4 - 1^4)\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3(-4) = -\left(-\frac{8}{3}\pi a^3\right) = \frac{8}{3}\pi a^3.$$ Ответ: $\frac{8}{3}\pi a^3$

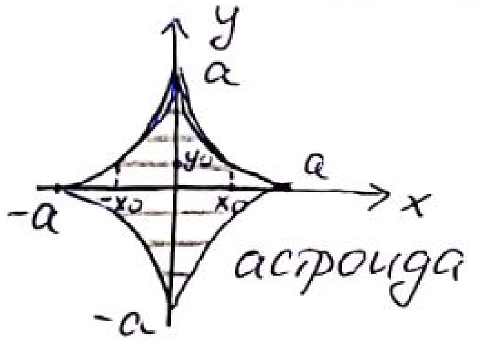
$\boxed{\text{Д/З III №1704.}}$

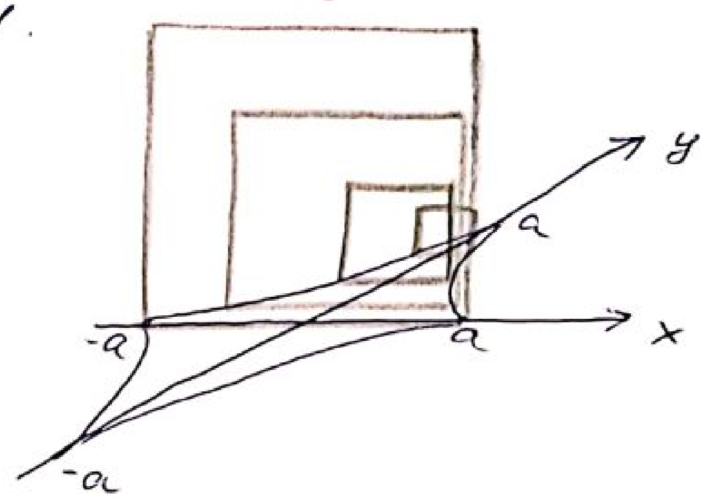
№ 17.07

На хордах астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, параллельных оси $Ox$, построены квадраты, стороны которых равны длинам хорд и плоскости которых $\perp$ пл. $Oxy$.

Найти объём тела, образованного этими квадратами.

Решение.




$$= \int_{-a}^{a} S_{\text{квадрата}}(y)\,dy$$

1) Найдём площади квадратов.

Рас. квадрат при $y=y_0$. Его сторона равна $l = 2|x_0|$,

где $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}}}^{\,3} \Rightarrow l = 2\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}}}^{\,3} \Rightarrow$

$\Rightarrow l(y) = 2\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}^{\,3}$.

След, $S_{\text{квадрата}}(y) = l^2(y) = 4\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^3$

2) Найдём

$$V = \int_{-a}^{a} 4\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^3 dy = 4\int_{-a}^{a}\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}-y^2\right)dy =$$

$$= 4\left(a^2y\Big|_{-a}^{a} - 3a^{\frac{4}{3}}\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Big|_{-a}^{a} + 3a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\Big|_{-a}^{a} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-a}^{a}\right) = \frac{128}{105}a^3$$

Ответ: $\frac{128}{105}a^3$.

# №1708.

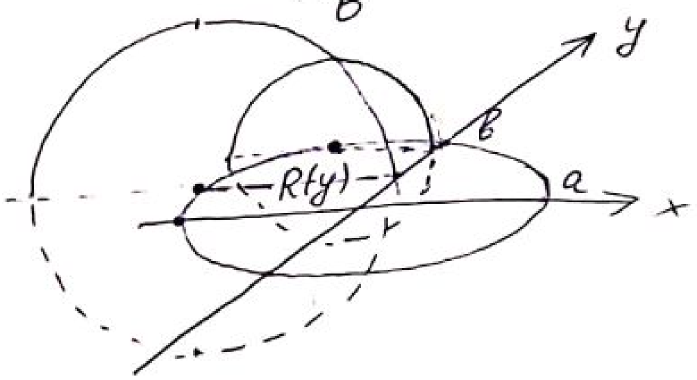
Деформирующийся круг перемещается так, что одна из его точек окружности лежит на оси $Oy$, центр описывает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а плоскость круга $\perp$ пл. $Oxy$.

Найти объём тела, образованного кругом.

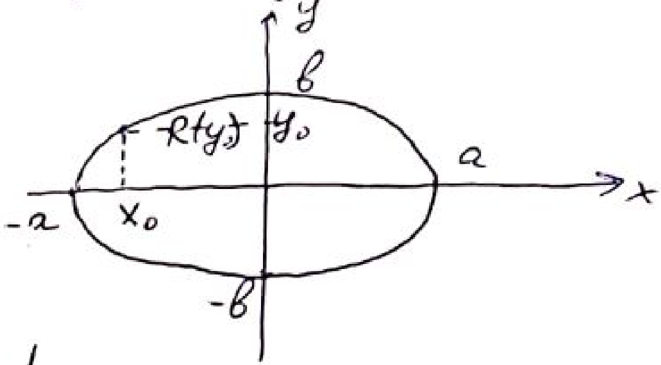
Решение.

Тело симметрично отн. плоскости $Oyz$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = 2\int_{-b} S(y)\,dy$.




1) Найдём площадь круга $S(y)=\pi R^2(y)$




Рас. круг при $y=y_0$.

Его радиус равен $R=|x_0|$,

где $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow |x_0| = a\sqrt{1-\frac{y_0^2}{b^2}} \Rightarrow R^2 = a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2(y) = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$

След, $S(y)=\pi a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$

Д/З IV. №1709

V. Найти и сделать задачу из подг. к РК и ИДЗ.

2) Найдём

$$V = 2\int_{-b}^{b}\pi a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a^2\left(y\Big|_{-b}^{b} - \frac{y^3}{3b^2}\Big|_{-b}^{b}\right) = \frac{8}{3}\pi a^2 b$$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi a^2 b$.