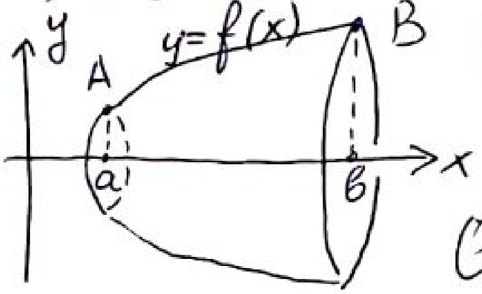
Занятие 13.

Площадь поверхности вращения.

Из теории:

I В декартовых координатах:



① кривая AB задана графиком ф-ции $y=f(x)$

$$Q_x=2\pi\int_a^в f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

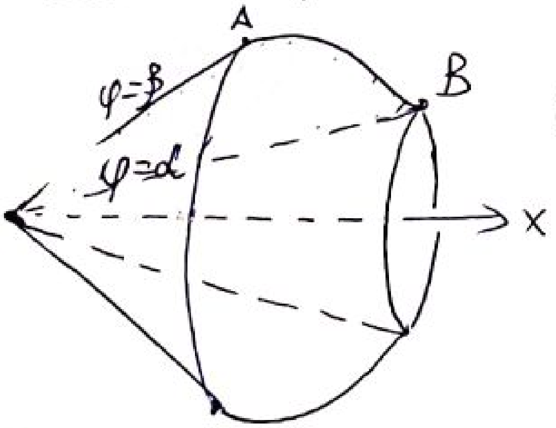
② Если кривая AB задана параметрически

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t\in[t_1,t_2]$,

то $Q_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

II. В полярных координатах:

Если кривая AB задана в полярных к-х:



$$Q_x=2\pi\int_\alpha^\beta r|\sin\varphi|\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

III. В декартовых к-х при вращении вокруг прямой ℓ

$$Q_x=2\pi\int_a^в R(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$Q_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} R(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

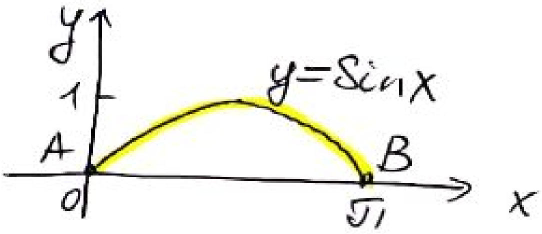
где $R(x)$, $R(t)$ - расст. от точки с соотв. x, t до прямой ℓ.

1:

№1715

Найти площадь поверхности „веретена", которое получается в результате вращения одной полуволны синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси Ox.

Решение.



$$Q_x = 2\pi\int_0^{\pi} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx =$$

$$= -2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,d\cos x = \text{считали ранее} =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\cos x}{1}\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -2\pi\left(\left(-1\sqrt{1+1} + \frac{1}{2}\ln\left|-1+\sqrt{1+1}\right|\right) - \left(1\sqrt{1+1} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{1+1}\right|\right)\right) =$$

$$= -2\pi\left(-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left|-1+\sqrt{2}\right| - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) =$$

$$= -2\pi\left(-2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = 2\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}^2-1}\right) =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)^2\right) = 2\pi\left(2\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)\right) =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)^{-1}\right) = 2\pi\left(2\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right)$$

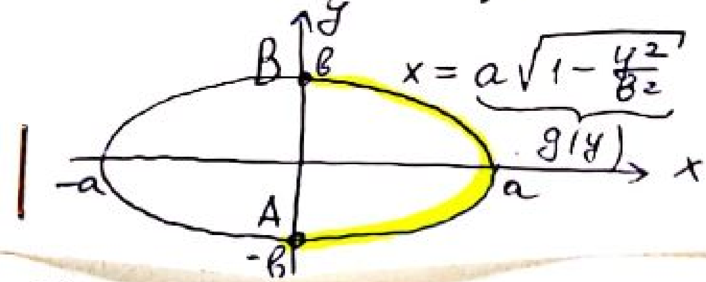
Ответ: ↑.

№1722.

Найти площадь поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ вокруг

1) оси Ox
2) оси Oy.

Решение 2):



I сп.

$$Q_y = 2\pi\int_{-b}^{b} g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy =$$

$$g'(y) = a\,\frac{-\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}};\quad g'^2(y) = a^2\,\frac{\frac{y^2}{b^4}}{1-\frac{y^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2}{b^2}y^2}{b^2-y^2};$$

$$1+g'^2(y) = 1+\frac{\frac{a^2}{b^2}y^2}{b^2-y^2} = \frac{b^2-y^2+\frac{a^2}{b^2}y^2}{b^2-y^2} = \frac{b^4-(b^2-a^2)y^2}{b^2(b^2-y^2)},$$

$$g(y)\cdot\sqrt{1+g'^2(y)} = a\,\frac{\cancel{\sqrt{b^2-y^2}}}{b}\cdot\frac{\sqrt{b^4-(b^2-a^2)y^2}}{b\,\cancel{\sqrt{b^2-y^2}}} =$$

$$= \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4-(b^2-a^2)y^2}$$

Подставим в интеграл:

$$= 2\pi\cdot 2\int_0^b \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4-(b^2-a^2)y^2}\,dy = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{b^2-a^2}\,y \\ y=0 \Rightarrow t=0 \\ y=b \Rightarrow t=\sqrt{b^2-a^2}\,b \\ dy=\frac{dt}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{array}\right] =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{a}{b^2}\,\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\int_0^{\sqrt{b^2-a^2}\,b}\sqrt{(b^2)^2-t^2}\,dt = \text{считали раньше} =$$

$$= \frac{4\pi a}{b^2\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{t}{2}\sqrt{(b^2)^2-t^2}+\frac{(b^2)^2}{2}\arcsin\frac{t}{b^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b^2-a^2}\,b} =$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{4\pi a}{b^2\sqrt{b^2-a^2}}\left(\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,b}{2}\cdot ab + \frac{b^4}{2}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right) - (0+0)\right) =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}.$$

Ответ: 2) ↑.

$\boxed{\text{Д/З I. №1722 1).}}$

Зам. Можно задать эллипс параметрически.

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ или $t \in [-\pi; \pi]$.

2:

№1723.

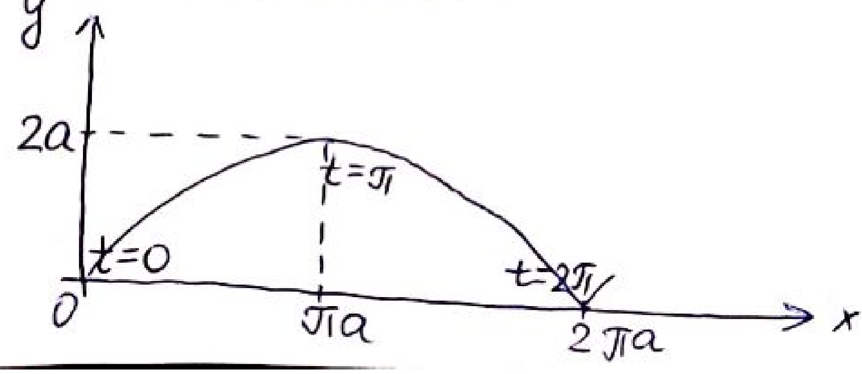
Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy,

в) вокруг касательной к циклоиде в её высшей точке.

Решение.



a) $Q_x = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt =$

$= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$

$= 2\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$

$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt =$

$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$

$= 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt =$

$= -16\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\,d\cos\frac{t}{2} = -16\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$

$= -16\pi a^2 \left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{2\pi}\right) =$

$= -16\pi a^2 \left((-1-1) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) =$

$= -16\pi a^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi a^2$

б) $Q_y = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$ ← для ДЗ.

III:

в) Касательной к циклоиде в высшей точке (при $t=\pi$) явл. прямая $y=2a$.

$$Q_\ell = 2\pi\int_0^{2\pi} \underbrace{R(t)} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt =$$

расст. от точки на кривой до оси вращения. Оно равно $2a-y(t)$.

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2a-a(1-\cos t))\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(a+a\cos t)\sqrt{a^2(2-2\cos t)}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}2\cos^2\frac{t}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\,d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -16\pi a^2\left.\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right|_0^{2\pi} = -\frac{16}{3}\pi a^2(-1-1) = \frac{32}{3}\pi a^2$$

Ответ: а) $\frac{64}{3}\pi a^2$ в) $\frac{32}{3}\pi a^2$

$\boxed{\text{Д/З II № 1723 б).}}$

Указание. См. формулу в тексте решения задачи.

II.

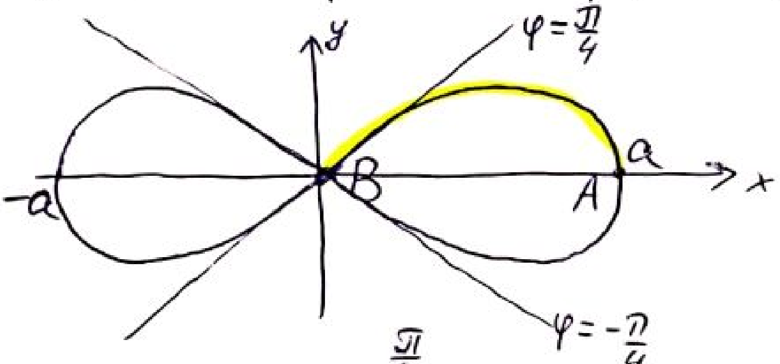
№1725.

Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

$$r^2=a^2\cos 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}+2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}+2\pi n \quad /:2$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}+\pi n$$



$$Q_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} r|\sin\varphi|\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi =$$

$$\left[r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow r'(\varphi) = a\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right]$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\varphi\sqrt{a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,\sin\varphi\,\frac{\sqrt{\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi}}{\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}}\,d\varphi$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) = -2\pi a^2(\sqrt{2}-2) =$$

$$= 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

Ответ: $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$

Д/З III. №1726

Д/З IV. Аналог задачи из ИДЗ и подготовки к РК.