Семинар 3 по интегралам.

Простейшие интегралы, содержащие ax^2+bx+c

1. $\boxed{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}$ | 2. $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Выделим в ax^2+bx+c полный квадрат: $ax^2+bx+c = \ldots = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Используем: $dx = d\left(x+\frac{b}{2a}\right)$.

Приведём к табличным интегралам

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$$

№1257.

$$\int \frac{dx}{3x^2-x+1} =$$

$$3x^2-x+1 = 3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{3}^{12)}\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2\right)$$

②

$$\ominus \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=$$

$a=\frac{\sqrt{11}}{6}$

$$=\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{\cancel{6}_2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}^{6)}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C$$

$\boxed{Д/З\ I \quad №1255,\ 1263}$

№1262

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\ \ominus$$

$$2+3x-2x^2=-2x^2+3x+2=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)=$$

$$=-2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right)=$$

$$=-2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1^{16)}\right)=-2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)=$$

$$=2\left(\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right)=2\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$\ominus\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}^{4)}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$$

3. $\boxed{\int \frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}}$

4. $\boxed{\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Найдём производную

$$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$$

Выделим в числителе выражение $2ax+b$:

$$mx+n = \ldots = \frac{m}{2a}(2ax+b) + n - \frac{mb}{2a}$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\cdot I_1 =$$

$$= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) I_1$$

$$\frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) I_2 =$$

$$= \frac{m}{\cancel{2}a}\,\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) I_2$$

Интегралы I_1, I_2 — это интегралы пред. случаев 1,2.

№1259.

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2-4x+5} =$$

$$= \left[\begin{aligned} &(x^2-4x+5)' = 2x-4 \\ &3x-2 = \frac{3}{2}\cdot 2x - 2 = \frac{3}{2}(2x-4+4)-2 = \\ &\qquad = \frac{3}{2}(2x-4)+4 \end{aligned} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(x^2-4x+5)'\,dx}{x^2-4x+5} + 4\int \frac{dx}{\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{выделили полный квадрат}}-4+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5} + 4\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 4\,\mathrm{arctg}(x-2) + C$$

№1265

$$\int \frac{(3x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} =$$

$$= \left[\begin{aligned} &(x^2-4x+5)' = 2x-4 \\ &3x-6 = \frac{3}{2}\cdot 2x-6 = \frac{3}{2}(2x-4+4)-6 = \\ &\quad = \frac{3}{2}(2x-4) \end{aligned} \right] =$$

Здесь 2-е слагаемое равно нулю.

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{3}{2}\int \frac{(x^2-4x+5)'\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{3}{2}\,\frac{(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x+5} + C$$

Д/З II №1258

1267

№1266

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx =$$

$$(1-x-x^2)' = -1-2x = -2x-1$$

$$2x-8 = -(-2x)-8 = -(\underbrace{-2x-1}+1)-8 = -(-2x-1)-9$$

$$= \int \frac{-(-2x-1)-9}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx =$$

$$= -\int \frac{(-2x-1)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} =$$

$$= -\int \frac{(1-x-x^2)'\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}} - 9\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$1-x-x^2 = -(x^2+x)+1 = -(\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{4})+1 =$$

$$= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\int (1-x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x-x^2) - 9\arcsin\frac{{}^{2/}x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= -\frac{(1-x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$$

5. $$\boxed{\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}}$$

Пусть $t=\frac{1}{mx+n}$.

Выразим x и найдём dx:

$$mx+n=\frac{1}{t} \Rightarrow x=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{t}-n\right)$$

$$dx=x'(t)\,dt = \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{dt}{mt^2}$$

Подставим в интеграл.

№1269

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} =$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}, \\ dx=x'(t)dt=-\frac{1}{t^2}dt, \\ x^2+x-1=\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}-1= \\ =\frac{1+t-t^2}{t^2} \end{array}\right] =$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t-t^2}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t|t|}\sqrt{1+t-t^2}} =$$

Рас. $t>0$ $(\Leftrightarrow x>0)$.

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}} =$$

$$1+t-t^2 = -(t^2-t)+1 = -(\underbrace{t^2-2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4})+1 =$$

$$= -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\arcsin\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt5}{2}}+C =$$

$$= -\arcsin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt5}{2}}+C = -\arcsin\frac{2-x}{\sqrt5\,x}+C =$$

$$= \arcsin\frac{x-2}{\sqrt5\,x}+C$$

При $t<0$ ($\Leftrightarrow x<0$) аналог. получим

$$-\arcsin\frac{x-2}{\sqrt5\,x}+C = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt5(-x)}+C =$$

$$= \arcsin\frac{x-2}{\sqrt5|x|}+C$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt5|x|}+C$.

Зам. В задачнике рас. только один случай $x>0$. Мы тоже будем рас. только по одному случаю.

№1271.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1, \\ dx = -\frac{1}{t^2}\,dt, \\ \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-1\right)} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \cancel{\frac{2}{t}} + 1 + \cancel{\frac{2}{t}} - 2} = \\ = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} \\ \text{Решим для } t > 0 \ (\Leftrightarrow x > 0). \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C =$$

$$= -\arcsin\frac{1}{x+1} + C$$

$$\boxed{\text{ДЗ } \underline{\text{III}} \quad № 1268, \ 1270}$$

6. $$\boxed{\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx}$$

Выделим полный квадрат под корнем $ax^2+bx+c=\ldots=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

При

$a>0$	$a<0$
исп. табличные	интегралы
$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=$	$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$
$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+$	$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+$
$+\frac{A}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert+C$	$+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

№1272

$$\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int\sqrt{x^2+2x+1-1+5}\,dx =$$

$$= \int\sqrt{(x+1)^2+4}\,d(x+1) = \text{табличный интеграл}$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4} + \frac{4}{2}\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C =$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

№1274.

$$\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} 2-x-x^2 = -(x^2+x)+2 = \\ = -(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+2 = \\ = -(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4} = \frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2})^2 \end{array}\right] =$$

$$= \int\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) = \text{табличный интеграл}$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3} + C$$

$\boxed{\text{Д/З IV №1273}}$

Интегралы, которые сводятся к простейшим интегралам, содержащим ax^2+bx+c, после подведение под знак дифф-ла.

№1277.

$$\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=\int\frac{de^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=[t=e^x]=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}=\ldots$$

№1278.

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}=-\int\frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}=[t=\cos x]=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}=\ldots$$

№1279.

$$\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}=\int\frac{\ln x\,d\ln x}{\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}=[t=\ln x]=$$

$$=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}}=\ldots$$

$$\boxed{\text{Д/З V №1275, 1276}}$$