

Интеграл от прав. дроби будет равен сумме интегралов от простейших дробей вида

1) $\frac{A}{x-\alpha}$ 2) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}, k \neq 1$

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ 4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, k \neq 1$

Интегралы от дробей вида 1), 2) сводятся к таблицным,
— " — от дробей вида 3)
мы рас. на прошлом семинаре,
— " — от дробей вида 4)
рас. на этом семинаре не будем.
(только частные случаи)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-4)} dx \quad \text{⊕}$$

правильная дробь; разложим её в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}$$

Найдём A, B, C.

Приведём дроби к общему знамен. и приравняем числители:

$$1 = A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2)$$

Иск. $1 = A(x^2 - 2x - 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 + x - 2)$

$$1 = (A+B+C)x^2 + (-2A-5B+C)x + (-8A+4B-2C)$$

Т.к. разложение многочлена по канонич. базису $1, x, x^2$ единств., то

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -2A-5B+C=0 \\ -8A+4B-2C=1 \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ отн. неизв. A, B, C. Решим СЛАУ любым способом. Например,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{элемент.} \\ \sim \text{преобр.-я} \\ \text{строк} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = \frac{1}{18} \\ C = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{⊕} \int \left(\frac{-\frac{1}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{18}}{x+2} + \frac{\frac{1}{18}}{x-4} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{1}{18} \int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{18} \int \frac{d(x-4)}{x-4} = \\ &= -\frac{1}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{18} \ln|x+2| + \frac{1}{18} \ln|x-4| + C \end{aligned}$$

Исп. нахождения A, B, C.

$$1 = A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2)$$

Пусть $x=1 \Rightarrow 1 = A \cdot 3 \cdot (-3) \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$

$x=2 \Rightarrow 1 = B(-3)(-6) \Rightarrow B = \frac{1}{18}$

$x=4 \Rightarrow 1 = C \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow C = \frac{1}{18}$

Д/З I №1283

те же A, B, C.

№1284.

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx \quad \square$$

неправильная дробь, т.к. степени числ. и знам. равны

Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r} -5x^3 + 0x^2 + 0x + 2 \quad | \quad x^3 - 5x^2 + 4x + 0 \\ -5x^3 - 25x^2 + 20x + 0 \\ \hline 25x^2 - 20x + 2 \end{array}$$

$$\square \int \left(5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} \right) dx = \left[\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4) = \\ = x(x-1)(x-4) \end{array} \right]$$

$$= 5 \int dx + \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x-1)(x-4)} dx \quad \ominus$$

прав. дробь, разложим в сумму простейших

$$\frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

$$25x^2 - 20x + 2 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$$

$x=0 \Rightarrow 2 = A(-1)(-4) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x=1 \Rightarrow 7 = B \cdot 1 \cdot (-3) \Rightarrow B = -\frac{7}{3}$

$x=4 \Rightarrow 2 \cdot 161 = C \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow C = \frac{161}{3}$

$$\begin{aligned} & \textcircled{=} 5x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{161}{6} \int \frac{dx}{x-4} = \\ & = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C \end{aligned}$$

D/3 II N1286

N1289.

$$\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx = [x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 5] =$$

$$= \int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x+2)^2 (x-5)^2} dx \textcircled{=}$$

Разложим дробь в сумму простейших:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{(x+2)^2 (x-5)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-5} + \frac{D}{(x-5)^2}$$

$$x^2 - 8x + 7 = A(x+2)(x-5)^2 + B(x-5)^2 + C(x+2)^2(x-5) + D(x+2)^2$$

$$x = -2 \Rightarrow 4 + 16 + 7 = B \cdot (-7)^2 \Rightarrow B = \frac{27}{49}$$

$$x = 5 \Rightarrow 25 - 40 + 7 = D \cdot 7^2 \Rightarrow D = -\frac{8}{49}$$

Возьмём:

$$x = 0 \Rightarrow 7 = A \cdot 2 \cdot 25 + \frac{27}{49} \cdot 25 + C \cdot 4 \cdot (-5) - \frac{8}{49} \cdot 4$$

$$5A - 2C = -\frac{30}{49} \quad (1)$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 = A \cdot 3 \cdot 16 + \frac{27}{49} \cdot 16 + C \cdot 9 \cdot (-4) - \frac{8}{49} \cdot 9$$

$$4A - 3C = -\frac{30}{49} \quad (2)$$

Решим $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$, получим $A = -\frac{30}{343}$

$$C = \frac{30}{343}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{30}{343} \\ B &= \frac{27}{49} \\ C &= \frac{30}{343} \\ D &= -\frac{8}{49} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{30}{343} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{27}{49} \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{30}{343} \int \frac{dx}{x-5} - \frac{8}{49} \int \frac{dx}{(x-5)^2} \\ &= -\frac{30}{343} \ln|x+2| - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343} \ln|x-5| + \frac{8}{49(x-5)} + C \end{aligned}$$

D/3 III N1285

N1290.

$$\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} dx$$

I сн.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{2x-3}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$x_1=1, x_2=2$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3}$$

и т.д. это долгое решение.

II сн.!

$$(x^2-3x+2)' = 2x-3 \Rightarrow \int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-3x+2)^3} = \int \frac{(x^2-3x+2)' dx}{(x^2-3x+2)^3} =$$

$$= \int \frac{d(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)^3} = -\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2} + C$$

Задача.

$$\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx \quad \text{⊖}$$

прав. гробѣ

$$\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$x^3+4x^2+4x+2 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2$$

$$x^3+4x^2+4x+2 = (A+C)x^3 + (2A+B+2C+D)x^2 + (2A+B+C+2D)x + (A+B+D)$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B+2C+D=4 \\ 2A+B+C+2D=4 \\ A+B+D=2 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\text{⊖} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \dots$$

Д/З IV Задача. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

№ 1296 Указание. $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$