Семинар 5 по интегралам

Интегралы от тригонометрич. функций

① $\boxed{\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx \quad , m \geq 0, n \geq 0}$

1) m или n нечётное

Пример.

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x \, dx =$$

$$= -\int \cos^2 x \sin^2 x \, d\cos x = -\int \cos^2 x (1-\cos^2 x) \, d\cos x =$$

$$= \int (\cos^4 x - \cos^2 x) \, d\cos x = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

№ 1338.

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int \cos^2 x \, d\sin x =$$

$$= \int (1-\sin^2 x) \, d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Итак, 1) „отделяем" одну степень от нечётной и подводим под знак дифф-ла,

2) для оставшейся чётной степени используем осн. триг. тождество и всё выражаем через одну триг. ф-ю.

№1341

$$\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}\,dx = 2\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\int \cos^5\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -2\int \cos^5\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}\,d\left(\cos\frac{x}{2}\right) =$$

$\int u^5(1-u^2)\,du$

$$= -2\int \cos^5\frac{x}{2}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)d\cos\frac{x}{2} =$$

$$= -2\int \left(\cos^5\frac{x}{2} - \cos^7\frac{x}{2}\right)d\cos\frac{x}{2} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos^6\frac{x}{2}}{6} - \frac{\cos^8\frac{x}{2}}{8}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2} + C$$

Д/З I №1340
1339
1362

2) m и n чётные

Понизим степени по ф-лам:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

№1345.

$$\int \sin^2 x \cdot \underbrace{\cos^4 x}_{(\cos^2 x)^2} dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\int dx+\int \cos 2x\, dx-\int \underset{\substack{\uparrow\\ \text{чётная}\\ \text{степень}}}{\cos^2 2x}\, dx-\int \underset{\substack{\uparrow\\ \text{нечётная}\\ \text{степень}}}{\cos^3 2x}\, dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(x+\frac{1}{2}\underbrace{\int \cos 2x\, d2x}_{\sin 2x}-I_1-I_2\Big) \boxed{=}$$

$$I_1 = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int dx+\int \cos 4x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\int \cos 4x\, d4x\right) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \cos^2 2x \cos 2x\, d2x = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\, d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int d\sin 2x-\int \sin^2 2x\, d2x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C$$

Подставим I_1 и I_2:

$$\boxed{=}\ \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

ДЗ II № 1344, 1346

② $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, $m>0, n>0$ и $m+n=$ чётное число
(напр., m и n оба чётные или m и n оба нечётные)

„Отделим" $\cos^2 x$ и „подведём под d":

$$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}\cos^2 x}=\int\frac{d(tg\,x)}{\sin^m x\cos^{n-2}x};$$

Запишем $\sin^m x=(\sin^2 x)^{\frac{m}{2}}$
$\cos^{n-2}x=(\cos^2 x)^{\frac{n-2}{2}}$

и выразим $\sin^2 x, \cos^2 x$ через $tg\,x$ по ф-лам (это сл. из осн. триг. тождества):

$$\cos^2 x=\frac{1}{tg^2 x+1},\quad \sin^2 x=\frac{tg^2 x}{tg^2 x+1}.$$

Дальше можно заменить $tg\,x=t$.
Аналог. можно решать через $ctg\,x$.

№1350

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^4x}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x\cos^2x}=\int\frac{d\,tgx}{\frac{tg^2x}{tg^2x+1}\cdot\frac{1}{tg^2x+1}}=$$

$$=[t=tgx]=$$

$$=\int\frac{dt}{\frac{t^2}{(t^2+1)^2}}=\int\frac{(t^2+1)^2}{t^2}dt=$$

$$=\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^2}dt=\int(t^2+2+t^{-2})dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+2t+\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{tg^3x}{3}+2tgx-\frac{1}{tgx}+C$$

№1351

$$\int\frac{dx}{\sin^5x\cos^3x}=\int\frac{dx}{(\sin^2x)^{\frac{5}{2}}(\cos^2x)^{\frac{1}{2}}\cos^2x}=$$

$$=\int\frac{d(tgx)}{\left(\frac{tg^2x}{tg^2x+1}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{tg^2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}=[t=tgx]=$$

$\boxed{\text{Д/З III №1352}}$

$$=\int\frac{(t^2+1)^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}}{(t^2)^{\frac{5}{2}}}dt=\int\frac{(t^2+1)^3dt}{t^5}=$$

$$=\int\frac{(t^2)^3+3(t^2)^2 1+3t^2\cdot1^2+1^3}{t^5}dt=\int(t+3t^{-1}+3t^{-3}+t^{-5})dt=$$

...

3 $\boxed{\int \frac{dx}{\sin^n x}}$ | $\boxed{\int \frac{dx}{\cos^n x}}$

1) n - чётное ($\Rightarrow n-2$ чётное)

„Отделим"

$\sin^2 x$ | $\cos^2 x$

и „подведём под d":

$$\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \sin^2 x} = -\int \frac{d(ctg x)}{(\sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x \cos^2 x} = \int \frac{d(tg x)}{(\cos^2 x)^{\frac{n-2}{2}}}$$

Выразим

$\sin^2 x$ | $\cos^2 x$

через

$ctg x$ | $tg x$

по ф-лам

$$\sin^2 x = \frac{1}{ctg^2 x + 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{ctg^2 x}{ctg^2 x + 1}$$

см. п. 2

$\boxed{\text{Д/З IV № 1348}}$

№ 1347

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x \sin^2 x} = -\int \frac{d(ctg x)}{\sin^2 x} = -\int (ctg^2 x + 1)\, d(ctg x) =$$

$$= -\frac{ctg^3 x}{3} - ctg x + C$$

2) <u>n − нечётное</u> ($\Rightarrow n+1$ чётное)

Доможим числитель и знаменатель

на $\sin x$:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^{n+1} x} = -\int \frac{d\cos x}{(\sin^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} =$$

на $\cos x$:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^{n+1} x} = \int \frac{d\sin x}{(\cos^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} =$$

Исп. основное триг. тождество:

$$= -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} = [t=\cos x] = \ldots$$

$$= \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} = [t=\sin x] = \ldots$$

<u>Зам.</u> Другие способы решения рас. позже.

№1354.

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^6 x} = -\int \frac{d\cos x}{(\sin^2 x)^3} =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)^3} = [t=\cos x] = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^3} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2-1)^3} = \int \frac{dt}{(t-1)^3(t+1)^3} =$$ в сумму простейших дробей

$$\boxed{\text{Д/З V} \quad 1) \int \frac{dx}{\cos^5 x} \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^3 x}}$$

<u>Зам.</u> Можно исп. ф-лы приведения:

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ и др.

4 $\boxed{\int ctg^n x\,dx} =$

$= \int ctg^{n-2} x \cdot ctg^2 x\,dx =$

$= \int ctg^{n-2} x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx =$

$= -\int ctg^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, d\,ctg\,x =$

$\boxed{\int tg^n x\,dx} =$

$= \int tg^{n-2} x \cdot tg^2 x\,dx =$

$= \int tg^{n-2} x\, \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int tg^{n-2} x \sin^2 x\, d\,tg\,x =$

Выразим

$\cos^2 x = \frac{ctg^2 x}{ctg^2 x + 1}$ | $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1}$

$= -\int \frac{ctg^n x}{ctg^2 x + 1} d\,ctg\,x =$ | $= \int \frac{tg^n x}{tg^2 x + 1} d\,tg\,x =$

$= [t = ctg\,x] = \ldots$ | $= [t = tg\,x] = \ldots$

Зам. Мы рассмотрели интегралы

$\boxed{\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx}$ | $\boxed{\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx}$

$\approx$ №1359 $\boxed{\text{Д13 } \overline{\text{VI}} \text{ №1358}}$

$\int tg^3 \frac{x}{3} dx = 3\int tg^3 \frac{x}{3} d\frac{x}{3} = 3\int tg\frac{x}{3}\, tg^2\frac{x}{3}\, d\frac{x}{3} =$

$= 3\int tg\frac{x}{3} \frac{\sin^2\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}} d\frac{x}{3} = 3\int tg\frac{x}{3} \cdot \frac{tg^2}{tg^2\frac{x}{3}+1} d\,tg\frac{x}{3} = [tg\frac{x}{3} = t] =$

$= 3\int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \ldots$

5
$$\boxed{\begin{aligned}&\int \sin mx \cos nx\,dx\\&\int \sin mx \sin nx\,dx\\&\int \cos mx \cos nx\,dx\end{aligned}}\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\int(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)\,dx\end{aligned}$$

№1365

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin(-2x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x\,dx - \int \sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\int \sin 8x\,d8x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Д13 $\underline{\text{VII}}$ № 1366 $\to \int \sin 10x \sin 15x\,dx$

1367

1368

1372 $\to \int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$