Семинар 6 по интегралам

Интегралы от тригонометрич. функций (продолжение)

⑥ $\boxed{\int \underbrace{R(\sin x, \cos x)}_{\text{рациональная ф-я от } \sin x, \cos x} dx}$

1) Выразим $\sin x, \cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ по формулам

$$\boxed{\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}.$$

2) Заменим $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$.

Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Т.к. $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t + \pi n \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t + 2\pi n$,

то $\boxed{dx =} x'(t)dt = \boxed{\frac{2}{1+t^2}dt}$.

Получим интеграл от рац. ф-ции от t.

Зам. Через $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ можно решать многие инт-лы предыд. типов, но иногда получ. громоздко

№1377.

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} ; t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; dx = \frac{2}{1+t^2}dt \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{8 - 4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\frac{8(1+t^2) - 8t + 7(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{8(1+t^2) - 8t + 7(1-t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2-8t+15} =$$

это интеграл типа $\int \frac{dt}{at^2+bt+c}$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-3)(t-5)} =$$

$= \Big[$ Разложим на простейш. дроби: $\frac{1}{(t-3)(t-5)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-5}$

$$1 = A(t-5) + B(t-3)$$

$$1 = (A+B)t - 5A - 3B$$

Получим сист. ур-ий:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -5A-3B=1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{коэф-ты при } t \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(t-3)(t-5)} = \frac{-\frac{1}{2}}{t-3} + \frac{\frac{1}{2}}{t-5}$$

$\Big] =$

$$= 2\left(\int \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{t-3} + \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t-5}\right) = -\int \frac{dt}{t-3} + \int \frac{dt}{t-5} =$$

$$= -\int \frac{d(t-3)}{t-3} + \int \frac{d(t-5)}{t-5} =$$

$$= -\ln|t-3| + \ln|t-5| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right| + C$$

ДЗ I. №1375, 1378.

(7) $$\boxed{\int \underbrace{R(\sin^2 x, \cos^2 x)}_{\text{рац. ф-я от } \sin^2 x,\ \cos^2 x} dx}$$

1) Выразим $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ через $tg x$ по формулам (следствие из осн. триг. тождества):

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

2) Заменим $\boxed{tg x = t}$.

Тогда $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Т.к. $x = arctg t + \pi n \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{1+t^2} dt}$

Получим интеграл от рац. ф-ции от t.

№1382.

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \sin^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} ;\ t = tg\,x;\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{t^2}{1+t^2} + 5\cdot\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2+5} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,tg\,x\right) + C$$

$\boxed{\text{Д/З II №1381}}$

№1389.

$$\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Разложим } \dfrac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \dfrac{A}{2-\sin x} + \dfrac{B}{3-\sin x} \\ 1 = A(3-\sin x) + B(2-\sin x) \\ 1 = \sin x\,(-A-B) + 3A + 2B \\ \begin{cases} -A-B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \end{matrix} \right] =$$

$$= \int \frac{dx}{2-\sin x} - \int \frac{dx}{3-\sin x} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{2 tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad x = 2\operatorname{arctg} t + \pi n \Rightarrow \\ t = tg\frac{x}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{2t}{1+t^2}} - \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-\frac{2t}{1+t^2}} = \ldots$$

доделать

ДЗ III №1389.

№1380.

$$\int \frac{1+tg x}{1-tg x} dx =$$

$$= \left[t = tg x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t + \pi n \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)} = -\int \underbrace{\frac{t+1}{(t-1)(t^2+1)}}_{\text{правильная дробь}} dt =$$

$$= \frac{t+1}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \ldots$$

доделать

ДЗ IV №1380.

ДЗ V №1387* Указ. понижать степень, $t = \sin 2x$

Интегралы от некоторых иррациональных функций

1) $$\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right) dx}$$

Пусть $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n = \text{НОК}(q_1, q_2, \ldots)$

Частный случай:

$$\boxed{\int R(x, \sqrt[q_1]{x}, \sqrt[q_2]{x}, \ldots) dx}$$

Пусть $t = \sqrt[n]{x}$, где $n = \text{НОК}(q_1, q_2, \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = t^n \Rightarrow dx = nt^{n-1}dt$

Зам. Считаем $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$; $x > 0$ в ч. случ.

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[q_i]{x} = x^{\frac{1}{q_i}}$$

№1318.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{НОК}(2,3) = 6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt, \\ \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{6}})^3 = t^3 \\ \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = (x^{\frac{1}{6}})^2 = t^2 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} =$$ ← неправ. дробь

$$= \left[\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \right.$$
$$\left. = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right] =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$$

$\boxed{\text{Д13}\,\overline{\text{VI}},\ N\,1319}$

N 1.

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,d(x+1) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow t^6 = x+1 \Rightarrow x+1 = t^6 \Rightarrow \\ \Rightarrow d(x+1) = 6t^5 dt; \\ \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = \left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^3 = t^3 \\ \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}} = \left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^2 = t^2 \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{1-t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt = -6\int \frac{t^8 - t^5}{t^2+1}\,dt =$$

$$\begin{array}{l|l} t^8+0t^7+0t^6-t^5+0t^4+0t^3+0t^2+0t+0 & t^2+0t+1 \\ \hline t^8+0t^5+t^6 & t^6-t^4-t^3+ \\ \quad -t^6-t^5+0t^4 & +t^2+t-1 \\ \quad -t^6-0t^5-t^4 & \\ \hline \qquad -t^5+t^4+0t^3 & \\ \qquad -t^5-0t^4-t^3 & \\ \hline \qquad\quad t^4+t^3+0t^2 & \\ \qquad\quad t^4+0t^3+t^2 & \\ \hline \qquad\qquad t^3-t^2+0t & \\ \qquad\qquad t^3+0t^2+t & \\ \hline \qquad\qquad\quad -t^2-t+0 & \\ \qquad\qquad\quad -t^2-0t-1 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad -t+1 & \end{array}$$

След., $\frac{t^8-t^5}{t^2+1}=t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{-t+1}{t^2+1}$

$$=-6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{-t+1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t-\frac{1}{2}\int\frac{\overset{d(t^2+1)}{d(t^2)}}{t^2+1}+\right.$$

$$\left.+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2-6t+$$

$$+3\ln(t^2+1)-6\,\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$= -\frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7 + \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^5 + \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^4 - 2\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 -$$

$$-3\cdot\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^2 - 6\cdot\sqrt[3]{x+1} + \ln\left(\sqrt[6]{x+1}^{\,2}+1\right) -$$

$$-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C$$

Замечание. Можно упростить, используя $\left(\sqrt[nk]{x+1}\right)^k = \sqrt[n]{x+1}$.

$\boxed{\text{Д/З VII №1317}}$

№2.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x+4}}{(x+4)-4}\,d(x+4) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = t \Rightarrow x+4 = t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d(x+4) = 2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{t}{t^2-4}\,2t\,dt = 2\int \underbrace{\frac{t^2}{t^2-4}}_{\text{неправ. дробь}}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2-4+4}{t^2-4}\,dt = 2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt =$$

$$= 2\left(\int dt + 4\int\frac{dt}{t^2-4}\right) = 2\left(t + 4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) + C =$$

$$= 2t + 4\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

$\boxed{\text{Д/З VIII №1315, 1321, 1322}}$

№3

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,dx =$$

= [$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow$ выразим x через t:

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x-1 = t^2(x+1)$$

$$x-1 = xt^2 + t^2$$

$$x(1-t^2) = 1+t^2$$

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$dx = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)' dt$$

$$dx = \frac{2t(1-t^2)-(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$dx = \frac{2t-2t^3+2t+2t^3}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{4t\,dt}{(t^2-1)^2}$$] =

$$= 4\int \frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2} = -4\int \frac{t\cancel{(t-1)}\,dt}{(t+1)(t-1)^{\cancel{2}}(t+1)^2} =$$

$$= -4\int \underbrace{\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}}_{\text{прав. дробь; разложим на простейшие дроби}}\,dt =$$

$$\left[\frac{t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3}\right]$$

<u>и т.д.</u> Дорешивать не будем.

Д/З IX

1) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

2) №1324 (сделать до разлож. на простейшие дроби)