Семинар 6 по интегралам, часть 2

Интегралы от некоторых иррациональных ф-ций (продолжение)

② $\boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx}$

План:

1) Выделим в ax^2+bx+c полный квадрат: $ax^2+bx+c = \ldots = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ и сделаем замену: $y = x+\frac{b}{2a}$, где $dy=dx$.

Получим интегралы типов:

1. $\int R(y, \sqrt{m^2-y^2})\,dy$

2. $\int R(y, \sqrt{m^2+y^2})\,dy$

3. $\int R(y, \sqrt{y^2-m^2})\,dy$

2) Сделаем соответствующие (триг. или гиперб.) подстановки.

1. $y = m\sin t$ или $y = m\,\mathrm{tg}\,t$
2. $y = m\,\mathrm{tg}\,t$ или $y = m\,\mathrm{sh}\,t$
3. $y = \frac{m}{\sin t}$ или $y = m\,\mathrm{ch}\,t$

<u>Напоминание</u>. $\mathrm{ch}\,t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\mathrm{sh}\,t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$;

$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$; $\mathrm{sh}^2\frac{t}{2} = \frac{\mathrm{ch}\,t-1}{2}$, $\mathrm{ch}^2\frac{t}{2} = \frac{\mathrm{ch}\,t+1}{2}$;

$(\mathrm{ch}\,t)' = \mathrm{sh}\,t$, $(\mathrm{sh}\,t)' = \mathrm{ch}\,t$.

№1403.

$$I=\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} 3-2x-x^2=-(x^2+2x-3)=-(x^2+2x+1-1-3)= \\ =-((x+1)^2-4)=4-(x+1)^2 \end{array}\right]=$$

$$=\int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx=\left[y=x+1,\ dy=dx\right]=$$

$$=\int\sqrt{\underbrace{4}_{m^2}-y^2}\,dy =$$

I сп. Исп. триг. подстановки

$$=\left[\begin{array}{l} y=2\sin t \Rightarrow \quad dy=2\cos t\,dt, \\ \qquad\qquad\qquad \sqrt{4-y^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}= \\ \qquad\qquad\qquad\quad =2\sqrt{1-\sin^2 t}=2|\cos t|= \\ \qquad\qquad\qquad\quad =2\cos t \quad (\text{рас. } t\in I \text{ четв.}) \end{array}\right]=$$

$$=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int\cos^2 t\,dt=\overset{2}{\cancel{4}}\int\frac{1+\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt=$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int(1+\cos 2t)\,d(2t)=\int d(2t)+\int\cos 2t\,d(2t)=$$

$$=2t+\sin 2t+C=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \underline{\text{Вернёмся к } y}:\quad y=2\sin t \Rightarrow 1)\ t=\arcsin\frac{y}{2}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{однозн. реш. т.к. } t\in I \text{ четв.}) \\ 2)\ \sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}= \\ \qquad =2\sin\left(\arcsin\frac{y}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{y}{2}\right)}= \\ \qquad =\cancel{2}\cdot\frac{y}{\cancel{2}}\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}=\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} \end{array}\right]=$$

$$= 2\arcsin\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{4-(x+1)^2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

II сп. По частям (как №1252)

$$= \sqrt{4-y^2}\cdot y - \int y\, d(\sqrt{4-y^2}) =$$

$$= y\sqrt{4-y^2} - \int y\frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{4-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{4-y^2} - \int\frac{-4+4-y^2}{\sqrt{4-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{4-y^2} + 4\int\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} - \int\sqrt{4-y^2}\,dy =$$

$$= y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\frac{y}{2} - I.$$

Получим ур-е относит. интеграла I:

$$I = y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\frac{y}{2} - I$$

$$2I = y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\frac{y}{2} + C$$

$$I = \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\frac{y}{2} + C$$

$$I = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

№1404

$\int \sqrt{\underbrace{2}_{m^2}+x^2}\,dx \;=$

I сп. Исп. гиперболич. подстановки

$= \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}\,sh\,t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,ch\,t\,dt \\ \sqrt{2+x^2} = \sqrt{2+2\,sh^2 t} = \sqrt{2}\,\sqrt{1+sh^2 t} = \\ = \sqrt{2}\,|ch\,t| \quad ch\,t, \text{т.к. } ch\,t > 0\ \forall t \end{array} \right] =$

$= \int \sqrt{2}\,ch\,t \cdot \sqrt{2}\,ch\,t\,dt = 2\int ch^2 t\,dt = \cancel{2}\int \frac{ch\,2t+1}{\cancel{2}}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\int (ch\,2t+1)\,d(2t) = \frac{1}{2}\int ch\,2t\,d(2t) + \frac{1}{2}\int d(2t) =$

$= \frac{1}{2}\,sh\,2t + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}t + C =$

$= \frac{1}{2}\cdot sh\,2t + t + C =$

Вернёмся к x: $sh\,t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ 1) выразим t:

$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow e^t - e^{-t} = \sqrt{2}x \quad | \cdot e^t$

$e^{2t} - \sqrt{2}x\,e^t - 1 = 0$

$e^t = \frac{\sqrt{2}x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}+1} =$

не подх, т.к. $e^t > 0$

$= \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}$

2) $sh\,2t = 2\,sh\,t\,ch\,t = 2\,sh\,t\,\sqrt{1+sh^2 t} = 2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}} = x\sqrt{2+x^2}$

=

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{2+x^2} + \ln\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+2}) \underbrace{- \ln\sqrt{2} + C}_{\text{нове } C}$$

II сп. По частям (как №1253)

$$I \ominus \sqrt{2+x^2}\cdot x - \int x\, d(\sqrt{2+x^2}) =$$

$$= x\sqrt{2+x^2} - \int x \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{2+x^2} - \int \frac{-2+2+x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{2+x^2} + 2\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} - \int\sqrt{2+x^2}\,dx =$$

$$= x\sqrt{2+x^2} + 2\ln|\underbrace{x+\sqrt{2+x^2}}_{>0}| - I.$$

Получим ур-е относит. I:

$$2I = x\sqrt{2+x^2} + 2\ln(x+\sqrt{2+x^2}) + C$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} + \ln(x+\sqrt{2+x^2}) + C$$

ДЗ: №1405, 1406, 1407, 1408