Оценка определённых интегралов

(А) Из геометрического смысла:

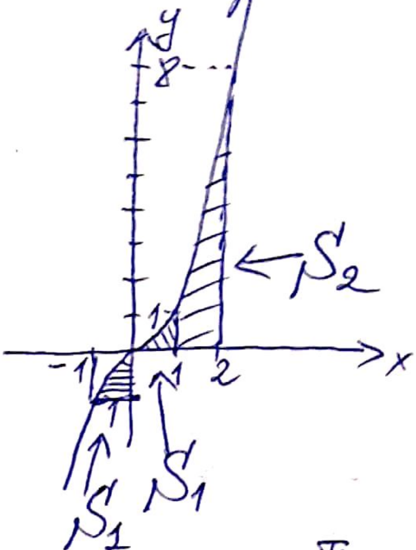
$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \underline{S\ \text{криволин. трап.}}, & \text{если } f(x) \geq 0 \\ \underline{-S\ \text{криволин. трап.}}, & \text{если } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

№1610.

Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $I = \int_{-1}^{2} x^3 dx$.

Построим $f(x) = x^3$ на $[-1; 2]$:



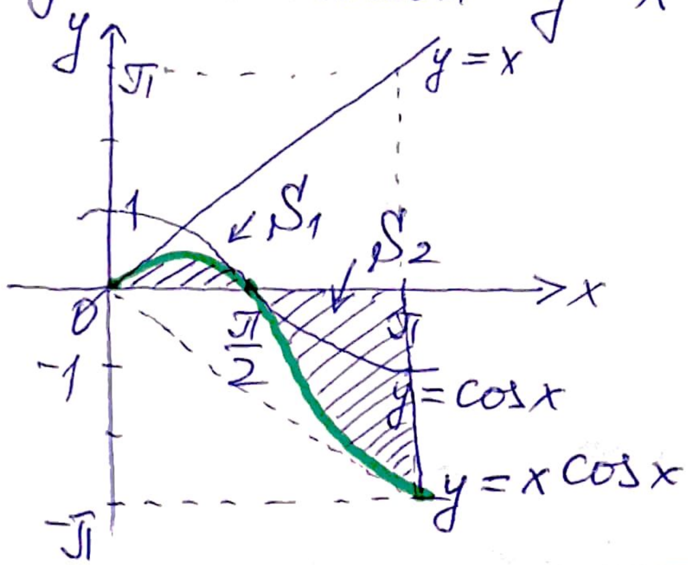
$$I = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{1}^{2} x^3 dx =$$

$$= \cancel{-S_1} + \cancel{S_1} + S_2 = S_2 > 0.$$

б) $I = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$.

Построим $f(x) = x\cos x$ на $[0; \pi]$:

умножением $y=x$ и $y=\cos x$ на $[0,\pi]$



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x\,dx=$$

$$=S_1+(-S_2)<0,$$

т.к. $S_1<S_2$.

$\boxed{\text{Д/З VIII №1610. Указ. } f(x)=\frac{\sin x}{x}=\sin x\cdot\frac{1}{x}}$.

Б) Переход к интегралу в неравенстве

$$f(x)\le g(x)\quad\forall x\in[a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

№1611.

Не вычисляя интегралов, сравнить их.

а) $I_1=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ и $I_2=\int_0^1 x\,dx$

Т.к. $\sqrt{1+x^2}\geqslant x\quad\forall x\quad(\Rightarrow\forall x\in[0,1])$

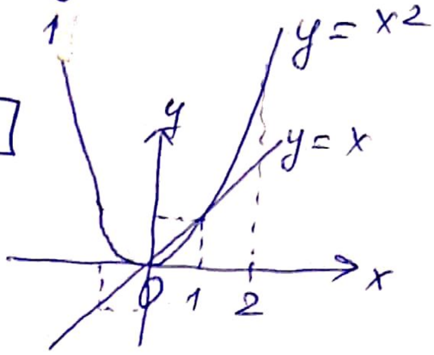
$$\Downarrow$$

$I_1\geqslant I_2$.

в) $I_1 = \int_1^2 e^{x^2} dx$ и $I_2 = \int_1^2 e^x dx$

Т.к. при $x \in [1, 2]$

$x^2 \geq x$



и ф-я $y = e^x$ возрастающая,

то при $x \in [1, 2]$

$e^{x^2} \geq e^x$.

След., $I_1 \geq I_2$.

$\boxed{\text{ДЗ } \overline{\text{IX}} : \text{№1611 б)}}$

В Оценка интеграла.

$$\left.\begin{array}{c} m \leq f(x) \leq M \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \text{ и } \varphi(x) \text{ непр.} \end{array}\right\} \forall x \in [a, b]$$

$$\Downarrow$$

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$$

$$\Downarrow \text{ п Б}$$

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx$$

Частный случай: для $\varphi(x)=1 \ \forall x\in[a,b]$

$$\left.\begin{matrix} m \le f(x) \le M \\ f(x) \text{ непр.} \end{matrix}\right\} \forall x \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}$$

№1621.

Оценить интеграл: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение.

I сп. Возьмём $f(x)=\sin x$ и $\varphi(x)=\frac{1}{x}$.

При $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ $\varphi(x)\ge 0$,

$m=\frac{\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le 1 = M$.

След.,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\frac{1}{x}\,dx \le 1\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \ln|x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\left(\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{4}\right)}_{\ln 2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \underbrace{\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{4}}_{\ln 2}$$

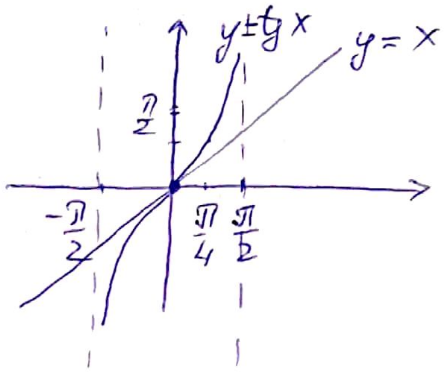
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \ln 2$$

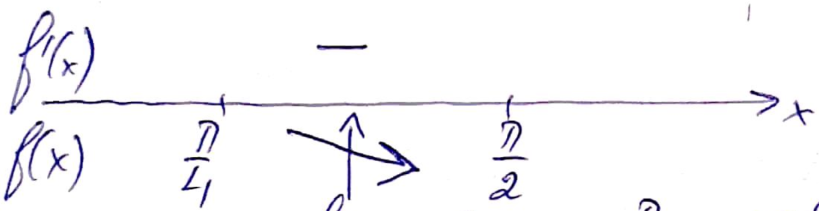
II сп. (более точная оценка)

Рас. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \iff \operatorname{tg} x = x$ нет реш. на $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$





возьмём $x=\frac{\pi}{3}$ и найдём $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}<0, \text{ т.к. } \frac{\pi}{3}\approx 1$$

След., $\boxed{f(x) \text{ убывает на } \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\pi}{\cancel{4}_{2}}} > f(x) > \frac{1}{\frac{\pi}{4}}$$

$$m=\frac{2}{\pi}<f(x)<\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=M$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Именно такая оценка в ответе задачника

№1619.

Оценить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$. $\stackrel{\text{обозн.}}{=} I$

Решение:

$$-1 \le \cos x \le 1 \quad \Big| \cdot 3 \quad >0$$
$$-3 \le 3\cos x \le 3 \quad \Big| +10$$
$$(0<) \quad 7 \le 3\cos x + 10 \le 13$$

$$\frac{1}{7} \geq \frac{1}{3\cos x + 10} \quad \frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{13} \le \frac{1}{10+3\cos x} \le \frac{1}{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{13}(2\pi - 0) \le I \le \frac{1}{7}(2\pi - 0)$$

$$\frac{2\pi}{13} \le I \le \frac{2\pi}{7}$$

$\boxed{\text{Д/З } \underline{\overline{X}} \quad №1618, 1620.}$

Опр. Средним значением ф-ции $f(x)$ на $[a,b]$ наз. число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(если $f(x)$ интегрир. на $[a,b]$).

№1612.

Найти среднее значение ф-ции $f(x)=x^2$ на промежутке $0\le x\le 1$.

Решение.

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

№1614

то же задание для $f(x)=\sin^2 x$ на $0\le x\le \pi$.

Решение.

$$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi d(2x) - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,d(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}(2x)\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{ДЗ XI №1613}}$