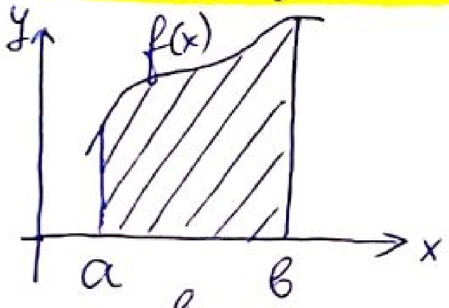
Занятие 9

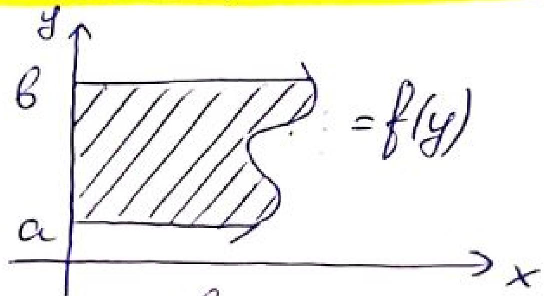
Вычисление площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах к-т.

Из теории:

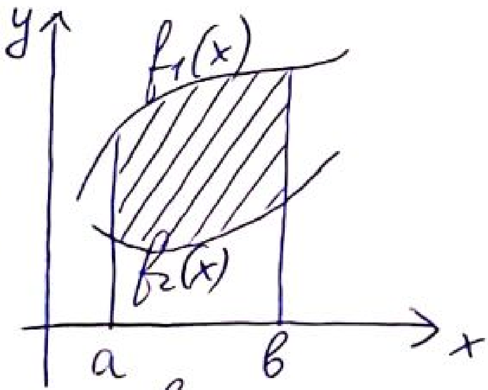
Площадь криволинейной трапеции.



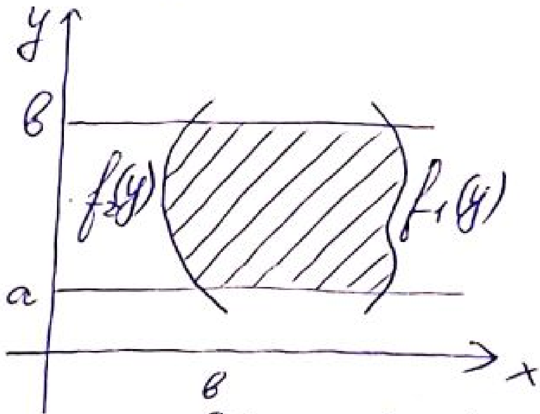
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b f(y)\,dy$$



$$S = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx$$



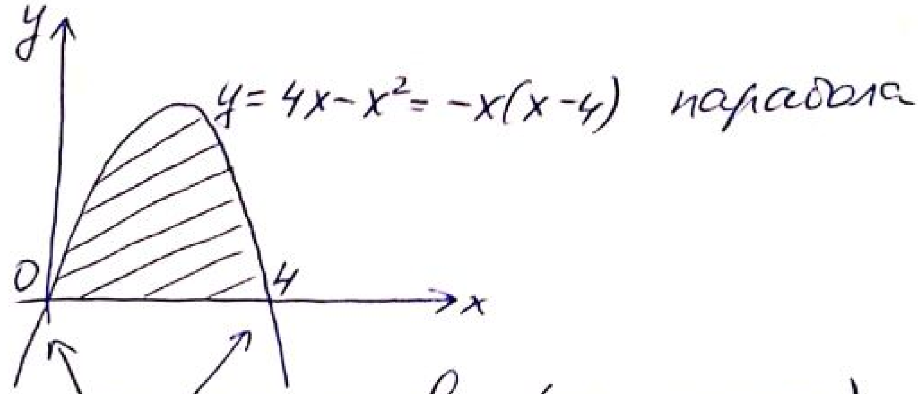
$$S = \int_a^b \left(f_1(y) - f_2(y)\right) dy$$

№1623

Вычислить S, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

Решение.

1) Рисунок:



это точки a и b (из рисунка)

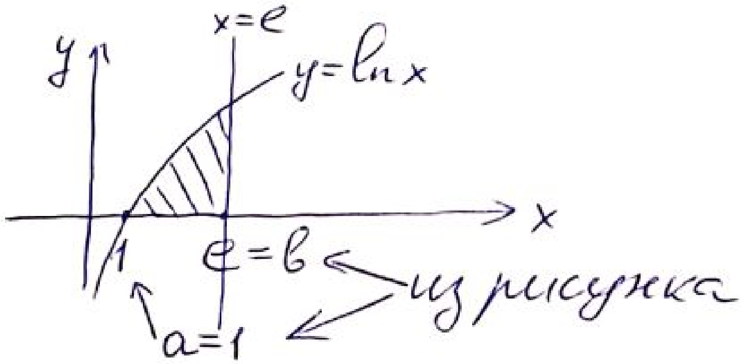
2) $S = \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \ldots = 10\frac{2}{3}$

№1624

Вычислить S фигуры, огранич. кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$.

Решение.

1) Рисунок:



2) $S = \int_1^e \ln x\,dx =$

$= \ln x \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e x\,\underbrace{d\ln x}_{\frac{1}{x}dx} = \ln x \cdot x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = \ldots = 1$

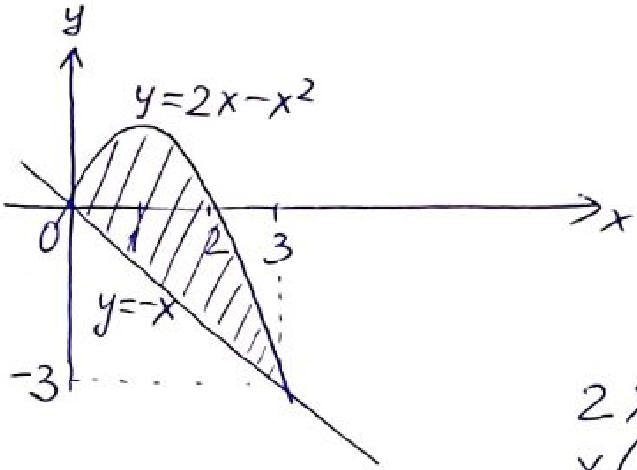
$\boxed{\text{Д/З I. №1626}}$

№1633

Вычислить S фигуры, огранич. параболой $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$

Решение.

1) Рисунок.



Найдём точки пересечения параболы и прямой:

$2x-x^2=-x$

$x(x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=3 \end{array}$

2) $S=\int\limits_0^3((2x-x^2)-(-x))dx=$

$=\int\limits_0^3(-x^2+3x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3=\ldots=4\frac{1}{2}$

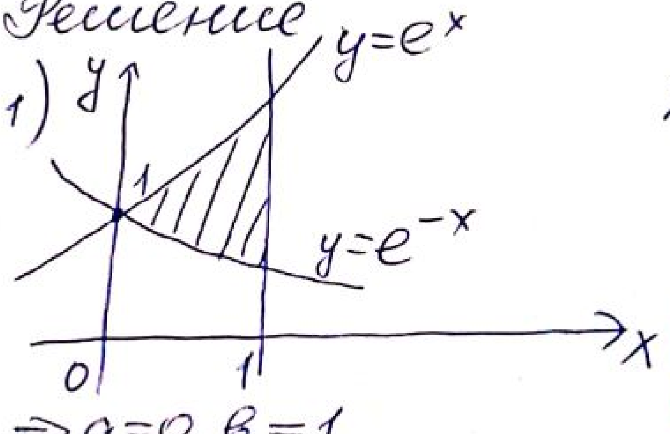
$\boxed{\text{Д/З II. №1634, 1636}}$

№1638

Вычислить площадь фигуры, огранич. кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $x=1$.

Решение

1)



$\Rightarrow a=0,\ b=1$

2) $S=\int\limits_0^1(e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=$

$=(e^1+e^{-1})-(e^0+e^{-0})=e+\frac{1}{e}-2$

$\boxed{\text{Д/З III №1645}}$

Площадь фигуры, граница которой задана параметрически

п.1)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt,$$

другие формулы аналогичны п.2), но с противопол. знаком

п.2)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\right) dt$$

Напоминание.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

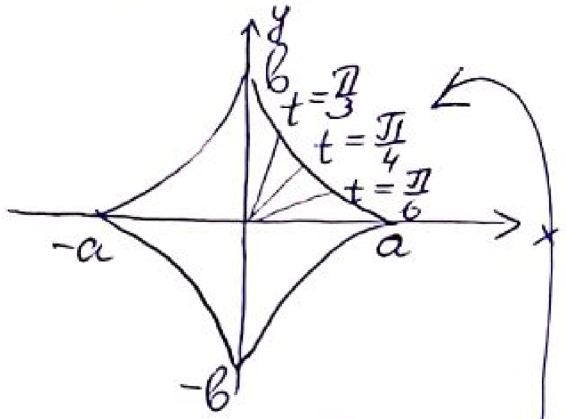
$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{x'_t\,y''_{tt} - x''_{tt}\,y'_t}{(x'_t)^3}$$

Зам. Если ошибиться в знаке и получился отрицат. ответ, то поменяйте знак (или всегда берите по модулю)

№ 1650

Найти S фигуры, содержащейся внутри астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

Решение.

1) 

Построение разберите самостоятельно. Можно отдельно построить $x(t), y(t)$ и потом „совместить" графики.

Обход против час. стрелки при изменении t от 0 до 2π. (см.)

2) $S = 4\underbrace{S_1}_{\text{площадь } \frac{1}{4} \text{ фигуры}} = 4\cdot\left(-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\,x'(t)\,dt\right) =$

$= -4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin^3 t\, a\cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt =$

$= 12ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$ = понижая степени =

$\ldots = \frac{3\pi}{8}$

$\boxed{\text{ДЗ IV. № 1653}}$

Площадь фигуры, заданной в полярных координатах: $r=f(\varphi)$.

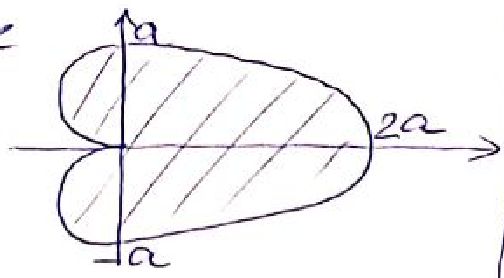
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\,d\varphi$$

№1655

Найти S фигуры, огранич. кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$

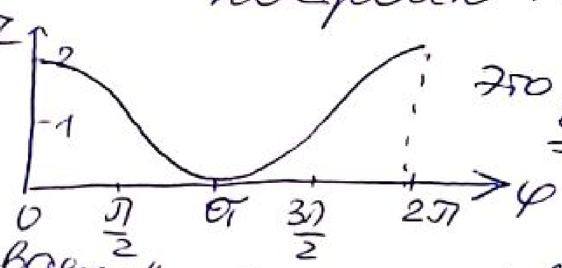
Решение

1) Рисунок



Зам. Список рисунков обычно есть в конце задачников. Или можно здесь построить так:

сначала строим график ф-ции $r=a(1+\cos\varphi)$, а затем „сворачиваем", думая, при каких φ какой будет r.
Ф-я периодическая, $T=2\pi$.



Это рис. для $a=1$

2) $$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=\ldots=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

Scanned by CamScanner

ДЗ V №1656

Указание.

$$S = S_{\text{от } 2\pi \text{ до } 4\pi} - S_{\text{от } 0 \text{ до } 2\pi} = \ldots$$

№1657.

Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\cos 2\varphi$, $a > 0$.

Решение.

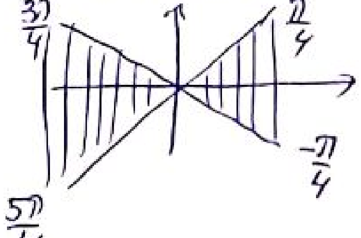
1) Рисунок. Т.к. $r \geq 0$, то получим ограничение на $\cos 2\varphi$:

$$\cos 2\varphi \geq 0$$

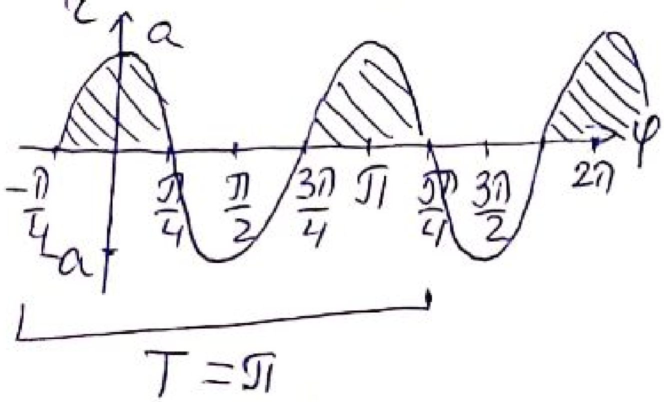
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad |:2$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$$

След. график расположен в заштрих. областях:

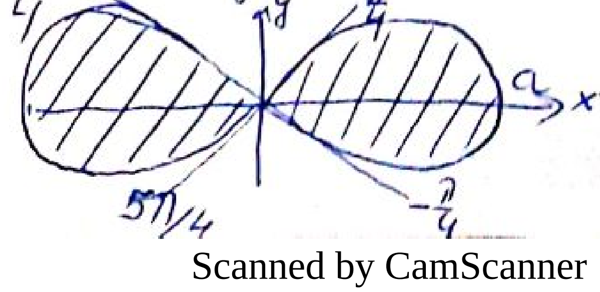


Нарисуем график $r = a\cos 2\varphi$ в декартовой системе к-т, а потом „свернём".



} нам нужно $r \geq 0$

Получим



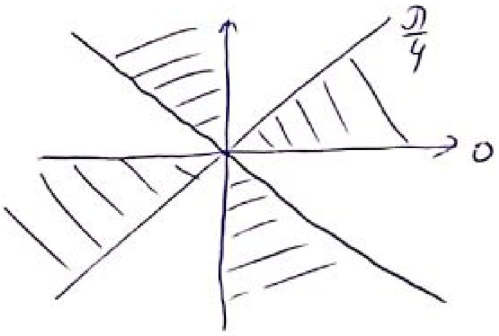
2) $S = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)\,d\varphi}_{\text{т.к. надо по усл. найти площадь только одного лепестка.}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi =$ понизим степень $= \dots$

$\dots = \frac{a^2\pi}{8}$

Д13 VI №1658

Указание

1) $r^2 = a^2\sin 4\varphi \Rightarrow r = a\sqrt{\sin 4\varphi} \Rightarrow$ ограничение на φ:



$0 \le \sin 4\varphi$

$0 \overset{+2\pi n}{\le} 4\varphi \le \pi^{+2\pi n} \quad |:4$

$0 \overset{+\frac{\pi n}{2}}{\le} \varphi \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

След., график расположен в заштрихованных областях. Сделайте (найдите) рисунок.

2) $S = 4\cdot S_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin 4\varphi\,d\varphi = \dots$

Д13 $\overline{\text{VII}}$ Найти и решить аналог. задачи 1) в своём варианте модульного ДЗ и 2) в подготовке к РК.