лекции 5-6

Операторы в евклидовом пр-ве.

<u>Зам.</u> Будем для краткости писать $\hat{A}\vec{x}$ вместо $\hat{A}(\vec{x})$.

Пусть E - евклидово пр-во ($\Rightarrow$ в E есть скалярное произведение).

<u>Опр.</u> Л-нейный оператор $\hat{A}: E \to E$ наз.

<u>самосопряженным</u>	<u>ортогональным</u>

если $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E$

$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}\vec{y})$	$(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$.
	<u>Следствия.</u> Ортогон. операторы сохраняют 1) нормы векторов и 2) углы между векторами (т.к. они выражаются через скалярные произведения)

Сканировано с CamScanner

Примеры.

① Тождественный оператор $\hat{I}$ явл. и самосопреж., и ортогон., т.к. $\hat{I}\vec{x}=\vec{x}\ \forall\vec{x}$

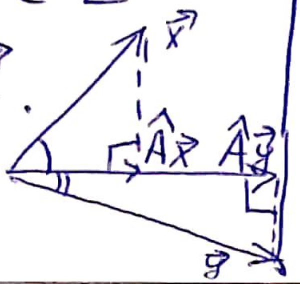
② $E=V_2$,

$\vec{e}$ – единичный вектор

$\hat{A}$ – ортогон. проекция на $\vec{e}$, т.е. $\forall\vec{x}\in E$

$\hat{A}\vec{x}=(\vec{x},\vec{e})\vec{e}$.

Тогда $\hat{A}$ – самосопреж. оператор



② $E=V_2$

1) $\hat{A}$ – поворот

2) $\hat{A}$ – симметрия отн любой прямой

Тогда $\hat{A}$ – ортогон. операторы (не меняют скал. произведение)

Какой вид имеют матрицы самосопреж. и ортогон. операторов?

Опр. Квадратная матрица A наз.

симметричной	ортогональной
если $A^T=A$	$A^TA=E$

Пример

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

Сканировано с CamScanner

Матрица оператора зависит от базиса. Рас. ортонормир. базисы.

<u>Теорема о виде матрицы оператора в ортонормир. базисе.</u>

Пусть E – евклид. пр-во,
$\hat{A}: E \to E$ лин. оператор.

1. Пусть $\mathcal{E}$ – <u>любой</u> ортонормир. базис, A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{E}$.
Тогда если $\hat{A}$ – самосопряженный | ортогональный оператор, то A – симметричная | ортогональная матрица.

2. Пусть <u>в некотором</u> ортонормир. базисе $\mathcal{E}$ матрица A оператора $\hat{A}$ является симметричной | ортогональной.
Тогда $\hat{A}$ – самосопряженный | ортогональный оператор.

Сканировано с CamScanner

Рас. дальше самосопряженные операторы.

Самосопряженные операторы: собств. значения, собств. векторы и диагональный вид матрицы.

Теорема о корнях хар. ур-я самосопреж. оператора (без док-ва)

Все корни хар. ур-я самосопреж. оператора

1) явл. действительными числами,

2) их алгебр. и геом. кратности совп.

Следствие о собств. значениях самосопреж. опер.

Самосопреж. оператор в n-мерн. евкл. пр-ве

1) имеет n собств. значений (если каждое из них считать столько раз, какова его кратность),

2) $\forall$ собств. значения λ размерность его собств. подпр-ва = кратности корня λ в хар. ур-ии.

Сканировано с CamScanner

Теорема о собств. векторах самосопряж. оператора, отвечающих различным собств. значениям.

Собств. векторы самосопряж. оператора, отвечающие различным собств. значениям, ортогональны.

Док-во.

Пусть λ_1, λ_2 – 2 различных собств. значения самосопряж. оператора $\hat{A}$,

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – соответств. собств. векторы,

т.е. $\hat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $\hat{A}\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$.

Док-м, что $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$ (т.е. что $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$).

Рас. скал. произв. $(\hat{A}\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ (1)

$(\vec{x}_1, \hat{A}\vec{x}_2) = (\vec{x}$ (2)

Из опр. самосопряж. оператора равны левые части (1) и (2). След., равны правые части (1) и (2):

$$\lambda_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2).$$

Преобразуем:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$ (это произведение равное нулю).

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по усл., то $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.

След., $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$.

ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Теорема о существовании для самосопрях. оператора ортонормир. базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

① $\forall$ самосопрях. оператора в евклид. пр-ве $\exists$ ортонормир. базис из собств. векторов этого оператора.

② Матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид;

диаг. элементами явл. собств. значения оператора, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Док-во (в частном случае для различных (не входит в РК) собств. значений).

① Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – различные собств. значения самосопрях. оператора, $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ – соотв. собств. векторы.

Тогда

1) по пред. теореме $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ ортогональны

2) по т-ме о лин. незав-ти собств. векторов отвечающих разл. собств. значениям – $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ лин. независимы. Их n штук. След, это базис.

Из 1), 2) $\Rightarrow$ $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ – ортогональный базис евкл. пр-ва.

Сканировано с CamScanner

Нормируем $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$, получим ортонормир. базис из собств. векторов.

2) Рас. любой k-ый столбец матрицы оператора в этом базисе.

Т.к. $\hat{A}\vec{x_k} = \lambda_k \vec{x_k} = 0 \cdot \vec{x_1} + \dots + 0 \cdot \vec{x_{k-1}} + \lambda_k \vec{x_k} + 0 \cdot \vec{x_{k+1}} + \dots + 0 \vec{x_n}$,

то k-й столбец имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(т.к. столбцами матриц оператора в базисе $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ явл. коорд-ты $\hat{A}\vec{x_1}, \dots, \hat{A}\vec{x_n}$ в базисе $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$)

Получим диаг. матрицу:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \hat{A}\vec{x_1} & \hat{A}\vec{x_2} & & \hat{A}\vec{x_n} \end{array} \end{array}$$

ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Рас. ортогональные матрицы и их геометрический смысл.

Свойства ортогональных матриц

Пусть A - ортогон. матрица.
Тогда

1. $\det A = \pm 1$.

Док-во. $A^T A = E \Rightarrow \det(A^T A) = \det E$

по св-вам определителей:

$$\det(A^T) \det A = \det E$$

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\det A = \pm 1$$ ч.т.д.

2. $A^{-1} = A^T$

3. $A A^T = E$

4. A^T - тоже ортогональная матрица

5. A, B - ортогональные матрицы одного порядка $\Rightarrow AB$ - тоже ортогон. матрица.

Сканировано с CamScanner

<u>Теорема</u> Пусть E – евклид. пр-во и $\mathcal{E}$ – ортонормир. базис в E. Тогда $\mathcal{E}'$ – ортонормир. базис в $E \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ матрица перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ явл. ортогональной.

Док-во $(\Rightarrow)$.
(не входит в РК)

Рас. матр. перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. По её столбцам стоят коорд-ты векторов $\mathcal{E}'$ в базисе $\mathcal{E}$. Но тогда

$$T^T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vdots \\ \vec{e}_n{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \dots & \vec{e}_n{}' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\vec{e}_1{}', \vec{e}_1{}') & \dots & (\vec{e}_1{}', \vec{e}_n{}') \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{e}_n{}', \vec{e}_1{}') & \dots & (\vec{e}_n{}', \vec{e}_n{}') \end{pmatrix} = E, \text{ т.к. } (\vec{e}_i{}', \vec{e}_j{}') = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

т.е. $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ ортогон. матрица.

$(\Leftarrow)$. Доказывать не будем. ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Сл Любую ортогон. матрицу $n \times n$ можно рассматривать

1) как матрицу перехода от одного ортонорм. базиса $\mathcal{E}$ к другому ортонорм. базису $\mathcal{E}'$;

2) как матрицу ортогон. оператора в нек. ортонормир. базисе $\mathcal{E}$.

Сканировано с CamScanner

Рас. симметричные матрицы, их геом. смысл и связь с ортогональными матрицами.

<u>Теорема</u>. $\forall$ симметр. матрицы A
$\exists$ ортогон. матрица T:

$$T^T A T = A',$$

где A' - диагональная матрица. Диагональными эл-ми матрицы A' явл. собственные значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, каковы их кратности.

Док-во (не входит в РК). Любую симметр. матрицу A можно рас. как матрицу самосопрях. оператора $\hat{A}$ в нек. ортонормир. базисе $\mathcal{E}$ евкл. пр-ва E.

Рас. матрицу A' того же оператора $\hat{A}$ в другом ортонормир. базисе $\mathcal{E}'$, причём (т.к. базис $\mathcal{E}'$ можно взять состоящим из собств. векторов оператора $\hat{A}$) A' - диагональная матрица.

Пусть $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ - матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$. Тогда

Сканировано с CamScanner

1) с одной стороны, $A' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} A (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})$,

2) с другой стороны, $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – ортогональная матрица $\Rightarrow (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{T}$.

Из 1), 2) $\Rightarrow A' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{T} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

ч. т. д.

<u>Опр</u>. <u>Ортогональным преобразованием матрицы A</u> наз. преобразование

$$T^T A T,$$

где T – ортогональная матрица.

<u>Теорема</u> Любая симметр. матрица приводится к диагон. виду ортогональным преобразованием.

Сканировано с CamScanner

Дополнительно.

Пусть $\hat{A}: E \to E$ лин. оператор в евклид. пр-ве.

Опр. Лин. оператор $\hat{A}^*$ наз. сопряженным к оператору $\hat{A}$, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}^*\vec{y}).$$

Теорема $\forall$ лин. оператора $\hat{A}: E \to E$ $\exists$ сопряженный оператор $\hat{A}^*$, причём, если A – матрица оператора $\hat{A}$ в нек. базисе, то A^T - матрица оператора $\hat{A}^*$ в том же базисе.

Опр. Лин. оператор $\hat{A}: E \to E$ наз. самосопряженным, если $\hat{A}^* = \hat{A}$

(это другое определение самосопреж. оператора).

Сканировано с CamScanner