Лекция 1 по ЛА

Линейные пространства.

Опр. лин. пр-ва.

Пусть L – мн-во элементов любой природы, которые мы будем называть векторами и обозначать $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ...

Пусть $\mathbb{R}$ – мн-во действит. чисел.

Пусть на мн-вах L и $\mathbb{R}$ определены 2 операции, кот. наз. линейными операциями.

1-я операция – это сложение эл-в из L, которая каждой паре эл-в $\vec{x}, \vec{y} \in L$ ставит в соответствие эл-т $\vec{z} \in L$, который наз. суммой эл-в $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозн. $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

2-я операция – это умножение эл-в из L на числа из $\mathbb{R}$, которая каждому эл-ту $\vec{x} \in L$ и каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие эл-т $\vec{w} \in L$, который наз. произведением эл-та $\vec{x}$ на действит. число α и обозн. $\vec{w} = \alpha \vec{x}$.

Пусть для этих лин. операций вып. след. аксиомы (они наз. аксиомами лин. пр-ва):

1) коммутативность сложения:
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$;

2) ассоциативность сложения:
$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L \quad (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$;

3) существование нейтрального эл-та для сложения:
$\exists \vec{0} \in L : \forall \vec{x} \in L \quad \vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$;

4) существование противоположного эл-та
$\forall \vec{x} \in L \quad \exists -\vec{x} \in L : \quad \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$;

5) произведение эл-в из L на единицу из $\mathbb{R}$:
$\forall \vec{x} \in L \quad 1 \cdot \vec{x}=\vec{x}$;

6) ассоциативность произведения:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in L \quad (\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$;

7) дистрибутивность по числам:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in L \quad (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$;

8) дистрибутивность по векторам:
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

Тогда мн-во L наз. линейным (или векторным) пр-вом над мн-вом действит. чисел $\mathbb{R}$.

это конец определения

Примеры линейных пространств

① V_1, V_2, V_3 – мн-ва всех своб. векторов прямой, плоскости или пр-ва;

② $M_{mn}(\mathbb{R})$ – мн-во матриц типа $m \times n$, элементами которых явл. действит. числа;

Частные случаи:

а) M_{1n} – матрицы-строки

|| обозначается и наз. линейным арифметическим пр-вом
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

б) M_{n1} – матрицы-столбцы.

③ мн-во всех решений однородной СЛАУ;

④ мн-во всех непрерывных ф-ций на $[a,b]$. (или дифференцируемых)

⑤ мн-во всех многочленов от одной переменной степени $< n$.

Линейная зависимость и независимость

Опр Пусть L – лин. пр-во.
Системой векторов наз. конкретный неупорядоченный набор векторов.
Подсистемой системы наз. любая часть (подмн-во) этой системы.

Опр Система векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ из лин. пр-ва L наз. линейно зависимой, | независимой,
если
∃ | ∄
их нетривиальная лин. комбинация, равная $\vec{0}$, т.е.

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, не все равные нулю: $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$	если $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$, то $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0$ (т.е. только их трив. лин. комб. равна $\vec{0}$).

Теорема (Критерий лин. завис-ти и лин. независ-ти).

см. след. стр.

Система векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in L$ явл.

линейно

зависимой	независимой
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
хотя бы один из них является	ни один из них не является

линейной комбинацией остальных векторов.

Следствия

1. 1) Если система векторов содержит нулевой вектор $\vec{0}$, то она лин. завис.

   2) Если система векторов содержит лин. завис. подсистему, то она лин. завис.

2. 1) Если система векторов лин. независ., то любая её подсистема лин. независ.

   2) Если система векторов лин. независ. и вектор $\vec{y} \in L$ не явл. их лин. комбинацией, то расширенная система, сост. из исходной сист. и $\vec{y}$, лин. независима.

Опр Базисом лин. пр-ва L наз. любая упорядоченная система векторов такая, что
1) эта система лин. независима, и
2) любой вектор пр-ва L можно представить в виде лин. комбинации векторов этой системы.

Напр., пусть $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n} \in L$ базис в L. Это означает, что
1) $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ лин. независ., и
2) $\forall \vec{x} \in L \quad \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}} \quad (1)$$

Запись (1) наз. разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$, запис. в координатном виде.

Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ можно записать в матричном виде:

$$\vec{x} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{подробно}$$

или

$$\vec{x} = \mathcal{E} X \quad \text{кратко}$$

(где матрицы $\mathcal{E} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$)

Опр. Координатами вектора в базисе лин. пр-ва L наз. коэффициенты разложения этого вектора по данному базису.

Обозн. $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ в базисе $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$.

Теорема о единственности разложения вектора по базису.

Разложение вектора по базису единственно.

Следствие. Координаты вектора в базисе определяются единств. образом.

Теорема о лин. операциях над векторами в коорд. форме

1) При сложении векторов их коорд-ты (в данном базисе) складываются.
2) При умножении вектора на число его координаты умнож. на это число.

Док-во.

1) $\left.\begin{array}{l}\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n} \\ \vec{y} = y_1\vec{e_1} + \ldots + y_n\vec{e_n}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} =$

$= (x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}) + (y_1\vec{e_1} + \ldots + y_n\vec{e_n}) \overset{\text{по аксиомам 1), 2) лин-пр-ва}}{=}$

$= x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n} + y_n\vec{e_n} \overset{\text{по акс. 7)}}{=}$

$= (x_1 + y_1)\vec{e_1} + \ldots + (x_n + y_n)\vec{e_n}$

2) $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\vec{x} = \alpha(x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}) \overset{\text{по акс. 8)}}{=}$

$= \alpha(x_1\vec{e_1}) + \ldots + \alpha(x_n\vec{e_n}) \overset{\text{по акс. 6)}}{=}$

$= (\alpha x_1)\vec{e_1} + \ldots + (\alpha x_n)\vec{e_n}$

Ч. т. д

<u>Опр.</u> <u>Размерностью лин. пр-ва</u> наз. максимальное количество лин. независ. векторов этого пр-ва.

<u>Обозн.</u> $\dim L$.

Если макс. кол-во лин. независ. векторов в L

равно n,	не существует,
т.е.	
1) $\exists$ система из n лин. независ. векторов, и 2) любая система из большего кол-ва векторов лин. зависима,	$\forall n$ $\exists$ система из n лин. независ. векторов,
то пр-во L наз.	
<u>n-мерным</u>	<u>бесконечномерным</u>
<u>Обозн.</u> $\dim L = n$	<u>Обозн.</u> $\dim L = \infty$

Теорема 1. Если в лин. пр-ве L
$\exists$ базис из n векторов,
то лин. пр-во L n-мерно.
2. Если лин. пр-во L n-мерно,
то любой его базис
состоит из n векторов.

Теорема. Если лин. пр-во L n-мерно,
то любая лин. независ.
система из n векторов
явл. его базисом.

Матрица перехода

Пусть L – n-мерное лин. пр-во и $\mathcal{E}=(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$, $\mathcal{E}'=(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}')$ два базиса в L.

Пусть

$$\vec{e_1}' = u_{11}\vec{e_1} + \dots + u_{n1}\vec{e_n}$$
$$\vdots$$
$$\vec{e_n}' = u_{1n}\vec{e_1} + \dots + u_{nn}\vec{e_n}$$

или в матричном виде

$$(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}') = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n}) \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

кратко: $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cdot U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$

Опр. <u>Матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$</u> наз. матрица $U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, по столбцам которой стоят координаты векторов базиса $\mathcal{E}'$ относительно базиса $\mathcal{E}$.

Св-ва матрицы перехода

① $\det U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \neq 0$ <u>следствие</u>. $\exists (U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}$.

② $(U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} = U_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$

③ $U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot U_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}''} = U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}$

Формулы преобразования координат векторов

Пусть $\vec{x} \in L$ имеет к-ты X в базисе $\mathcal{E}$ и X' в базисе $\mathcal{E}'$, $U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

Тогда $\boxed{X = U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot X'}$

Док-во.

По условию $\vec{x} = \mathcal{E}X$ (1)

$\vec{x} = \mathcal{E}'X'$ (2)

и $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\,U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ (3).

Подставим (3) в (2):

$$\vec{x} = (\mathcal{E}\,U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})X' = \mathcal{E}(U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}X') \quad (4).$$

умн. матриц ассоциативно

Сравним (1) и (4). В силу единств-я разложения вектора по базису получим

$$X = U_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot X'.$$

Ч.т.д.