Лекция 2 по ЛА

Подпространства линейного пространства

Опр. Подмножество H лин. пр-ва L наз. линейным подпространством, если 1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \quad \vec{x}+\vec{y} \in H$,
2) $\forall \vec{x} \in H \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\vec{x} \in H$.

Теорема. Любое лин. подпр-во H лин. пр-ва L явл. лин. пр-вом.

Примеры лин. подпространств.

① $L = V_3$

Рас. 1) H - все векторы из V_3, ||-е фикс. прямой,
2) — " — " — " — " — " — " — плоскости.

② $L = \mathbb{R}^n$

Рас. H - мн-во всех решений некоторой однородной СЛАУ: $AX = \tilde{\Theta}$.

③ $L = M_{mn}(\mathbb{R})$, где $n=m$ (т.е. квадр. матр.)

Рас. 1) H - мн-во всех симм. матриц
2) — " — " — кососимм.
3) — " — " — диагональных

и т.д.

Опр. Линейной оболочкой системы векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ наз. мн-во H всех линейных комбинаций векторов этой системы, т.е.

$$H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

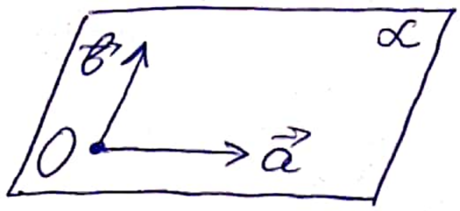
Обозн. $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$, $\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$

Теорема. Лин. оболочка любой системы векторов явл. линейным подпр-вом.

Примеры лин. оболочек.

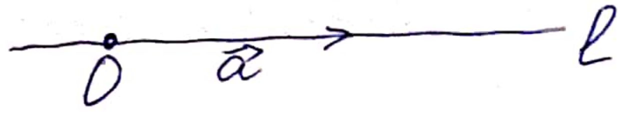
① $L = V_3$

1) Рас. $\vec{a}, \vec{b}$ – любые неколлин. векторы из L. Отложим $\vec{a}, \vec{b}$ от нек. т. O и рас. пл. α (см. рисунок).



$\Rightarrow L(\vec{a}, \vec{b})$ – это пр-во своб. векторов, компланарных α.

2) Рас. $\vec{a}$ – любой ненулевой вектор. Отложим $\vec{a}$ от нек. т. O и рас. прямую l (см. рисунок).



$\Rightarrow L(\vec{a})$ – это —"— "— "— "—, коллинеарных l.

2. Рас. СЛАУ, запис. в векторном виде:
$$x_1\vec{a}_1+\ldots+x_k\vec{a}_k=\vec{b} \qquad (\overset{\text{т.е.}}{AX=B})$$

Возможны 2 случая: система совместна || несовместна

Они экв. след. условиям:

совместна	несовместна
1) $\vec{b}\in L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k)$	1) $\vec{b}\notin L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k)$
2) $rg(A\vert B)=rg\,A$	2) $rg(A\vert B)\neq rg\,A$
3) $\dim L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k,\vec{b})=$ $=\dim L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k)$	3) $\dim L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k,\vec{b})\neq$ $\neq\dim L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k)$

Ранг системы векторов

<u>Опр.</u> <u>Рангом системы векторов</u> в лин. пр-ве наз. размерность лин. оболочки этой системы.

<u>Обозн.</u> $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$.

<u>След.</u>, по опр. ранга $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} = \dim L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) =$ по п. 2 теоремы из лекции 1 (с. 10)
$=$ количеству векторов любого базиса в $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$.

<u>Как найти $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$?</u>

<u>Теорема.</u> $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ равен

1) макс. кол-ву лин. независимых векторов в системе $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$,
2) $rg A$, где A – матрица из координат векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ в любом базисе лин. пр-ва L.

Евклидово пр-во

Опр. Скалярным произведением в лин. пр-ве L наз. операция, которая каждой паре эл-в $\vec{x}, \vec{y} \in L$ ставит в соответствие действительное число, которое наз. скал. произведением $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозн. $(\vec{x}, \vec{y})$ или $\vec{x}\vec{y}$,

при этом вып. след. аксиомы (они наз. аксиомами скал. произв.):

1) симметричность скал. произв.
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$

3) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L \quad (\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$

Аксиомы 2) и 3) наз. линейностью скал. произв. по 1-му аргументу.

4) положительная определённость:
$\forall \vec{x} \in L \quad (\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$

5) невырожденность
$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

$\boxed{\text{это конец определения}}$

Опр. Лин. пр-во наз. евклидовым, если на нём задано скал. произведение.

Обозн. E.

Другие свойства скал. произв.

1) $\forall \vec{x},\vec{y}\in L\quad \forall \beta\in\mathbb{R}\quad (\vec{x},\beta\vec{y})=\beta(\vec{x},\vec{y})$

2) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in L\quad (\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z})$

Свойства 1), 2) наз. линейностью скал. произв. по 2-му аргументу. След., скал. произв. билинейно.

3) $\forall \vec{x}\in L\quad (\vec{x},\vec{0})=\vec{0}$

4) Если $\forall \vec{z}\in L\quad (\vec{x},\vec{z})=(\vec{y},\vec{z})$, то $\vec{x}=\vec{y}$.

5) Неравенство Коши-Буняковского:

$\forall \vec{x},\vec{y}\in L\quad (\vec{x},\vec{y})^2\le(\vec{x},\vec{x})\cdot(\vec{y},\vec{y})$

Док-во.

Рас. ф-ю $f(t)=(t\vec{x}-\vec{y},\,t\vec{x}-\vec{y})$.

1) По аксиоме 4) (см. стр. 5) $f(t)\ge 0$

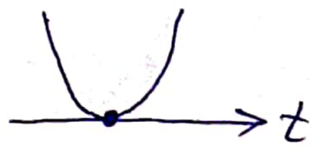
2) По акс. 1), 2), 3) (см. стр. 5) и св-вам 1), 2) можно расписать:

$f(t)=\dots=(\vec{x},\vec{x})t^2-2(\vec{x},\vec{y})t+(\vec{y},\vec{y})$,

распишите, почему

т.е. $f(t)=at^2+bt+c$. График $f(t)$ - парабола

Из 1), 2) $\Rightarrow$



Это возможно $\Leftrightarrow$ $D\le 0$.

Распишем $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac =$

$$= (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \le 0.$$

Отсюда получим нер-во К.-Б.

ч. т. д.

Примеры евклид. пр-в, и какой вид принимает в них нер-во К.-Б.

1) Пусть $L = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ и пусть $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Т.к. акс. 1)–5) скал. произведения для $(\vec{x}, \vec{y})$ выполняются, то L – евкл. пр-во.

Нер-во К.-Б.:

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

2) Пусть $L = M_{mn}(\mathbb{R})$,

пусть $(A, B) = \text{след}(AB^T)$

сумма диаг. эл-в матрицы

Т.к. акс. 1)–5) скал. произведения для (A, B) вып., то L – евкл. пр-во.

Нер-во К.-Б.:

$$(\text{след}(AB^T))^2 \le (\text{след}(AA^T))(\text{след}(BB^T))$$

③ Пусть $L = C[a,b]$ – мн-во всех ф-ций, непр. на $[a,b]$,

пусть $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Т.к. акс. 1)–5) скал. произв. для (f,g) вып., то L – евкл. пр-во.

Нер-во К.-Б.:

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)dx$$

Нормированное пр-во

Опр. Нормой в лин. пр-ве L наз. функция, которая каждому эл-ту $\vec{x} \in L$ ставит в соответствие действит. число, кот. наз. нормой $\vec{x}$ и обозн. $\|\vec{x}\|$, при этом вып. след. аксиомы (они наз. аксиомами нормы):

① 1) $\forall \vec{x} \in L \ \ \|\vec{x}\| \ge 0$ 2) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

② $\forall \vec{x} \in L \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$

③ Неравенство Δ-ка: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$
$\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Опр Лин. пр-во наз. нормированным, если в нём задана норма.

Зам. Линейное евклидово пр-во и линейное нормированное пр-во — это линейные пр-ва с разными структурами: скалярным произв. и нормой.

Примеры нормир. пр-в.

Пусть $L = \mathbb{R}^2 = \{\vec{x} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Определим в L разные нормы (получим разные нормир. пр-ва):

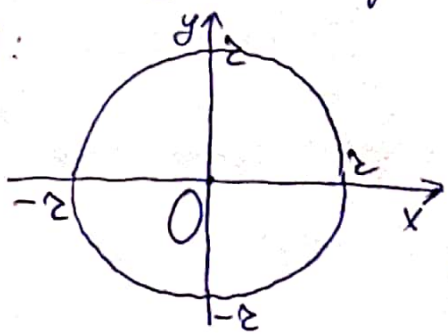
1) $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) $\|\vec{x}\| = |x| + |y|$

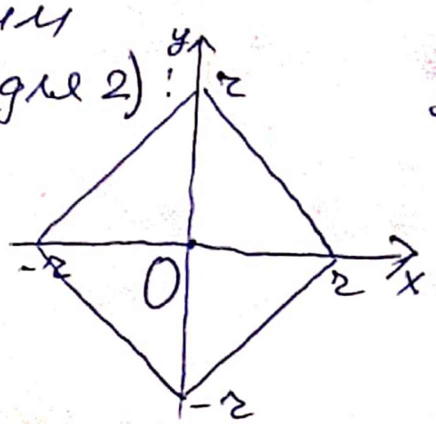
3) $\|\vec{x}\| = \max\{|x|, |y|\}$

Можно построить в $\mathbb{R}^2$ с разными нормами окружности с центром O и рад. r $\{$мн-во концов всех векторов $\vec{x}$, прилож. к т. $O \mid \|\vec{x}\| = r\}$. Получим

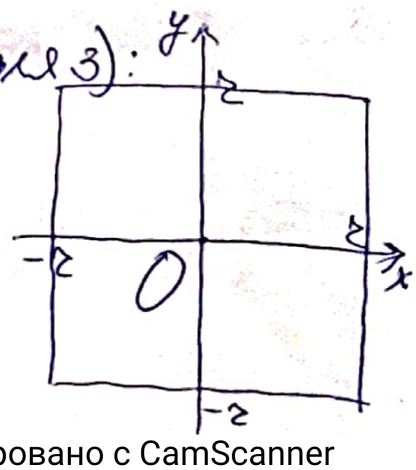
для 1):



для 2):



для 3):



Теорема Любое евклидово пространство может быть сделано нормированным, т.е. на нём можно задать норму.

Док-во.

Пусть E - евклидово пр-во со скал. произведением $(\vec{x}, \vec{y})$.

Определим на E норму: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Надо док-ть, что св-ва нормы будут выполняться, используя св-ва скал. произв.

Док-м только выполнение нер-ва Δ-ка в E.

1 Сначала док-м, что $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$.

1) Из опр. нормы в $E \Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$
$\|\vec{y}\|^2 = (\vec{y}, \vec{y})$

2) Из нер-ва Коши-Буняковского
$(\vec{x}, \vec{y})^2 \le (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$
и действия 1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y})^2 \le \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$.

След., $|(\vec{x}, \vec{y})| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}) \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

3) Из опр. нормы в $E \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y})$.
Распишем правую часть равенства:

$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) =$ по аксиомам 1)-3) скал. произв. и свойствам 1), 2) скал. произв.

$=(\vec{x},\vec{x})+2(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y}) \leq$ по действиям 1), 2)

$\leq \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2=$

$=\left(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\right)^2.$

Сравнивая с лев. частью рав-ва, получим $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \left(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\right)^2$

2) Извлечем корень из обеих частей нер-ва и исп. св-во 1), 1) нормы:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$$

ч.т.д.

<u>Зам.</u> Из док-ва следует, что

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \quad \text{(см. 1), 2))}$$

След., $\dfrac{|(\vec{x},\vec{y})|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} \leq 1 \quad \forall \vec{x}\neq\vec{0}, \vec{y}\neq\vec{0}$

<u>Опр.</u> <u>Углом между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в евкл. пр-ве E</u> наз. значение $\varphi\in[0,\pi]$: $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$.

<u>Зам.</u> Если $\vec{x}=\vec{0}$ или $\vec{y}=\vec{0}$, то φ не определён (считают любым).

Итак, в евклидовом пр-ве (линейном пр-ве со скал. произв.) можно определить 1) норму любого вект. и 2) угол между любыми векторами.

Кратко: в E

$(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$

$\searrow \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})} = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

Сравните!: в V_3

$|\vec{x}|, \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \longrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$

т.е. порядок определения понятий другой.

Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Опр. 2 вектора в евклид. пр-ве E наз. ортогональными, если их скал. произведение равно нулю.

Обозн. $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Опр. Система векторов в евклид. пр-ве E наз. ортогональной, если любые два вектора этой системы ортогональны.

Опр. Базис $\mathcal{E}$ евклид. пр-ва E наз. ортогональным, если система векторов $\mathcal{E}$ явл. ортогональной, т.е. $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Базис $\mathcal{E}$ евклид. пр-ва E наз. ортонормированным, если
1) он ортогональный и
2) норма каждого вектора равна 1,

т.е. $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases}$

Теорема Пифагора для ортогональных векторов. $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$

Теорема о связи ортогональности и лин. независимости.

Если система векторов ортогональна, то она лин. независима.

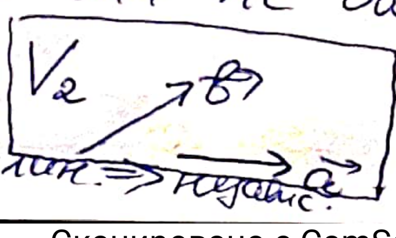
Следствие Если система векторов n-мерного евклид. пр-ва состоит из n ортогональных векторов, то она явл. базисом.

Пример. Пусть $E = V_2$ с обычным скал. произв. Тогда

1) $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j})$ – ортонормир. базис,

2) $\mathcal{E} = (\vec{i}, 2\vec{j})$ – ортогональный, но не ортонормир. базис.

Замечание к т-ме. Если система векторов лин. независ., то она не обязат. ортогональна. **Пример.**



$\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлин. $\Rightarrow$ незав.
но $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

Вычисления в произвольном и ортонормир. базисе

Пусть E - евклид. пр-во с базисом $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и векторы

$\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$
$\vec{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ в базисе $\mathcal{E}$.

Тогда скалярное произведение

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n) \overset{\text{по акс-м скал. произв.}}{=}$$

$$= \sum_{i,j}^{n} x_i y_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$ в коорд. виде;

перепишем посл. равенство в матричн. виде:

подробно

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

кратко

$(\vec{x}, \vec{y}) = X^T G Y$. Матрица G наз. матрицей Грама системы век. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

След.,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{X^T G X}$$

$$\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} = \frac{X^T G Y}{\sqrt{X^T G X}\sqrt{Y^T G Y}}$$

<u>Частный случай</u>: базис $\mathcal{E}$ ортонорм.

Тогда матрица Грама

$$G = E.$$

Получим формулы:

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T X}$$

$$\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}} = \frac{X^T Y}{\sqrt{X^T X}\sqrt{Y^T Y}}$$

<u>Сл</u> Пусть $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ <u>в ортонорм. базисе $\mathcal{E}$</u>.

Тогда $(\vec{x}, \vec{e}_i) = x_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.

т.е. <u>орт. проекция</u> <u>$\vec{x}$ на $\vec{e}_i$ равна x_i</u>

Док-во. $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

↑ на i-м месте