Лекция 3 по ЛА

Процесс ортогонализации Грама - Шмидта

Пусть E – n-мерное евклидово пр-во. $\mathcal{F}=(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n)$ – какой-то базис в E. Построим с помощью $\mathcal{F}$ ортонормир. базис $\mathcal{E}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$.

План 1.

1. Построим ортогональный базис $\mathcal{G} = (\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_n)$:

$$\vec{g}_1=\vec{f}_1$$

$$\vec{g}_2=\vec{f}_2-\frac{(\vec{f}_2,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}\vec{g}_1$$

$$\vec{g}_3=\vec{f}_3-\frac{(\vec{f}_3,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}\vec{g}_1-\frac{(\vec{f}_3,\vec{g}_2)}{\|\vec{g}_2\|^2}\vec{g}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{g}_n=\vec{f}_n-\frac{(\vec{f}_n,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}\vec{g}_1-\frac{(\vec{f}_n,\vec{g}_2)}{\|\vec{g}_2\|^2}\vec{g}_2-\dots-\frac{(\vec{f}_n,\vec{g}_{n-1})}{\|\vec{g}_{n-1}\|^2}\vec{g}_{n-1}$$

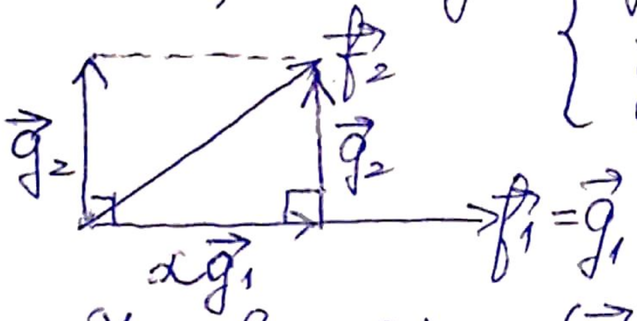
2. Нормируем базис $\mathcal{G}$, получим $\mathcal{E}$:

$$\vec{e}_i=\frac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|}, \quad i=1,\dots,n.$$

Док-во. Док-м для $n=3$.

1) Пусть $\vec{g}_1=\vec{f}_1$.

2) Построим $\vec{g}_2$: $\begin{cases} \vec{g}_2=\vec{f}_2-\alpha\vec{g}_1 & (1) \ (\text{т.е. } \alpha\vec{g}_1+\vec{g}_2=\vec{f}_2) \\ \vec{g}_2\perp\vec{g}_1 & (2) \end{cases}$



Условие (2) $\Leftrightarrow(\vec{g}_2,\vec{g}_1)=0$. Подставим (1):

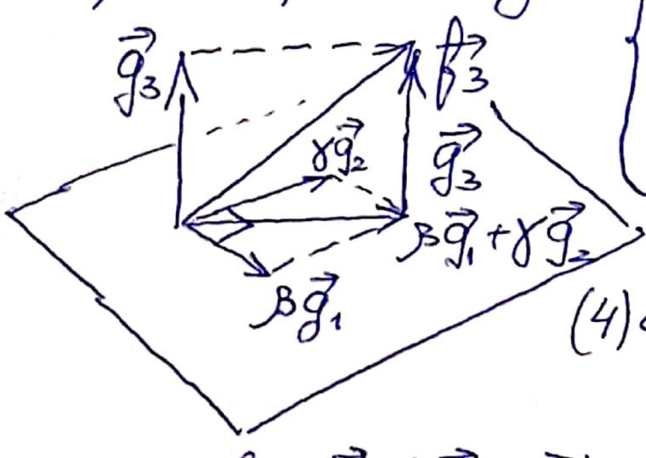
$$(\vec{f}_2-\alpha\vec{g}_1,\vec{g}_1)=0$$

$$(\vec{f}_2,\vec{g}_1)-\alpha(\vec{g}_1,\vec{g}_1)=0$$

$$\alpha=\frac{(\vec{f}_2,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}$$

След., $\vec{g}_2=\vec{f}_2-\dfrac{(\vec{f}_2,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}\vec{g}_1$

3) Построим $\vec{g}_3$: $\begin{cases} \vec{g}_3=\vec{f}_3-(\beta\vec{g}_1+\gamma\vec{g}_2) & (3) \\ \vec{g}_3\perp\vec{g}_1 & (4) \\ \vec{g}_3\perp\vec{g}_2 & (5) \end{cases}$



Условия

(4) $\Leftrightarrow(\vec{g}_3,\vec{g}_1)=0$ / (5) $\Leftrightarrow(\vec{g}_3,\vec{g}_2)=0$

Подставим (3):

$$(\vec{f}_3-\beta\vec{g}_1-\gamma\vec{g}_2,\vec{g}_1)=0$$

$$(\vec{f}_3,\vec{g}_1)-\beta(\vec{g}_1,\vec{g}_1)-\gamma\underbrace{(\vec{g}_2,\vec{g}_1)}_{=0}=0$$

$$\beta=\frac{(\vec{f}_3,\vec{g}_1)}{\|\vec{g}_1\|^2}$$

$$(\vec{f}_3-\beta\vec{g}_1-\gamma\vec{g}_2,\vec{g}_2)=0$$

$$(\vec{f}_3,\vec{g}_2)-\beta\underbrace{(\vec{g}_1,\vec{g}_2)}_{=0}-\gamma(\vec{g}_2,\vec{g}_2)=0$$

$$\gamma=\frac{(\vec{f}_3,\vec{g}_2)}{\|\vec{g}_2\|^2}$$

Ч.т.д.

План 2.

1) Построим $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$ и сразу его нормируем: $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$.

2) Построим $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \underbrace{(\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1}_{\text{это орт. проекция } \vec{f}_2 \text{ на } \vec{f}_1}$ и сразу его нормируем:

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$$

3) Аналог. $\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - (\vec{f}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{f}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2$,

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$$

и т. д.

Линейные операторы

Опр. Пусть L и L' – два линейных пр-ва.
Отображение $\hat{A}: L \to L'$ из L в L' наз. линейным отображением (или линейным оператором), если
1) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in L \quad \hat{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \hat{A}(\vec{a}) + \hat{A}(\vec{b})$,
2) $\forall \vec{a} \in L \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \hat{A}(\alpha\vec{a}) = \alpha \hat{A}(\vec{a})$.

Лин. отображение наз. линейным преобразованием, если $L' = L$. Рас. преобр-я.

Следствие $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Док-во. $\hat{A}(\vec{0}) \underset{\forall \vec{a} \in L}{=} \hat{A}(0 \cdot \vec{a}) = 0 \cdot \underbrace{\hat{A}(\vec{a})}_{\text{вектор из } L'} = \vec{0}$.

Примеры лин. операторов.

① L – пр-во многочленов степени $< n$
L' – " – " – " – " – " – $< n-1$
$\hat{A}$ – дифференцирование.
Из св-в производной $\Rightarrow \hat{A}: L \to L'$ явл. лин. оператором.

② $L = L' = V^2$, $\hat{A}$ – поворот плоскости вокруг нек. точки $\Rightarrow \hat{A}: L \to L$ лин. опер-р.

<u>Опр</u>. Пусть $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор.

<u>Ядром $\hat{A}$</u> наз. мн-во

$$\operatorname{Ker} \hat{A} = \{ \vec{a} \in L \mid \hat{A}(\vec{a}) = \vec{0} \}.$$

<u>Образом $\hat{A}$</u> наз. мн-во

$$\operatorname{Im} \hat{A} = \{ \vec{b} \in L \mid \exists \vec{a} \in L : \hat{A}(\vec{a}) = \vec{b} \}$$

<u>Теорема</u> $\operatorname{Ker} \hat{A}$ и $\operatorname{Im} \hat{A}$ явл. подпр-ми в L.

Матрица линейного оператора

Пусть $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор,

$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ базис в L.

Разложим образы базисных векторов

$\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)$

по базису $\mathcal{E}$:

$$\hat{A}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\hat{A}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Опр.</u> <u>Матрицей лин. оператора</u> $\hat{A}: L \to L$ в базисе $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ наз. матрица A, столбцы которой явл. координатами образов $\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)$ базисных векторов в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

коорд-ты $\hat{A}(\vec{e}_1)$ … $\hat{A}(\vec{e}_n)$ в базисе $\mathcal{E}$

<u>Зам.</u> $\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)$ – не обязат. базис в L.

Преобразование координат векторов под действием лин. оператора

Пусть $\vec{x} \in L$ имеет в базисе $\mathcal{E}$ коорд-ты $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,
$\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})$ – <u>образ $\vec{x}$</u> под действием $\hat{A}$.
Найдём коорд-ты $\vec{y}$ в базисе $\mathcal{E}$: $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

1) $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\dots+y_n\vec{e}_n$

2) $\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})=\hat{A}(x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n)\overset{\text{по опр. лин. оператора}}{=}$

$$=x_1\hat{A}(\vec{e}_1)+\dots+x_n\hat{A}(\vec{e}_n)=$$

$$=x_1(a_{11}\vec{e}_1+\dots+a_{n1}\vec{e}_n)+\dots+x_n(a_{1n}\vec{e}_1+\dots+a_{nn}\vec{e}_n)=$$

$$=(a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n)\vec{e}_1+\dots+(a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n)\vec{e}_n$$

Из 1) и 2) в силу единственности разложения вектора $\vec{y}$ по базису получим

$$\boxed{\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ y_n=a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n\end{cases}}$$ в коорд. форме,

$$\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}$$ в матричной форме подробно,

$$\boxed{Y=AX}$$ в матричной форме кратко.

Преобразование матрицы лин. оператора при переходе к новому базису

Пусть L - лин. пр-во, $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор, $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $\mathcal{E}' = (\vec{e}_1{}', \dots, \vec{e}_n{}')$ - 2 базиса в L, A и A' - матрицы $\hat{A}$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$.

Пусть $T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

Тогда $A' = (T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'})^{-1} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$

Зам. Столбцами A явл. к-ты $\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)$ в $\mathcal{E}$, столбцами A' явл. к-ты $\hat{A}(\vec{e}_1{}'), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n{}')$ в $\mathcal{E}'$.

Док-во.

Пусть $\vec{x} \in L$ любой вектор и $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$.

Пусть X и X' - к-ты $\vec{x}$ отн. $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$,
Y и Y' - к-ты $\vec{y}$ отн. $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$.

Тогда по ф-лам преобр-я к-т векторов

$$X = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X' \quad (1) \quad \text{и} \quad Y = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} Y' \quad (2)$$

и под действием лин. оператора $\hat{A}$

$$Y = AX \quad (3) \quad \text{и} \quad Y' = A'X' \quad (4)$$

Подставим (1) и (2) в (3) и используем ассоциативность умнож. матриц:

$$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}Y' = A(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}X') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}Y' = (A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})X'$$

Умножим слева на $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}$:

$$(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} Y' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}(A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})X'$$

$$\Rightarrow \quad Y' = ((T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})X'.$$

Сравнивая с (4), получим

$$A' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.$$

ч.т.д.

<u>Следствие</u>. $A' = T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$

<u>Следствие</u>. $\det A' = \det A$

<u>Опр</u>. <u>Определителем лин. оператора</u> наз. определитель его матрицы в каком-либо базисе.

<u>Опр</u>. Матрицы A и B наз. <u>подобными</u>, если $\exists$ невырожденная матрица T: $B = T^{-1}AT$.

Действия над лин. операторами и их матрицами

Рас. мн-во всех лин. операторов в лин. пр-ве L и определим операции на этом мн-ве. Тогда

Лин. операторы	Их матрицы в базисе E
$\hat{A}: L \to L$ $\hat{B}: L \to L$	A B
Сумма операторов $(\hat{A}+\hat{B})(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{B}(\vec{x})$	$A+B$
Произведение оператора на число $(\alpha \hat{A})(\vec{x}) = \alpha \cdot \hat{A}(\vec{x})$	αA
Противоположный оператор $-\hat{A} = (-1)\hat{A}$	$-A$
Тождественный оператор $\hat{I}$	E

<u>Теорема</u> Мн-во всех лин. операторов в лин. пр-ве L явл. лин. пр-вом.

<u>Сл.</u> 1) $\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}$ 2) $\hat{A} - \lambda\hat{I}$	$\alpha A + \beta B$ $A - \lambda E$
Произведение операторов $(\hat{B}\hat{A})(\vec{x}) = \hat{B}(\hat{A}(\vec{x}))$	BA
Обратный оператор (для взаимно-однозн. опер-в) $\hat{A}^{-1}$	A^{-1}