Лекция 4.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Опр. Пусть L - линейное пр-во, $\hat{A}: L \to L$ - линейный оператор. Ненулевой вектор $\vec{x} \in L$ наз. собственным вектором лин. оператора $\hat{A}$, если $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \hat{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

Число λ наз. собственным значением или собственным числом оператора $\hat{A}$

Опр. Пусть $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор, A - его матрица в нек. базисе E.

Характеристическим

многочленом $\hat{A}$	уравнением $\hat{A}$
наз.	
многочлен $\chi_A(\lambda) = \underbrace{\lvert A - \lambda E \rvert}_{\det(A-\lambda E)}$,	уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$

Следом $\hat{A}$	Определителем $\hat{A}$
наз. число, равное	
сумме диаг. эл-в A, т.е. $trA = a_{11} + \ldots + a_{nn}$	$\det A$

Пример. L – мн-во всех многочленов степени $< n$,
$\hat{A} = \frac{d}{dx}$ – оператор дифф-я.

Тогда любой многочлен нулевой степени (любая постоянная) явл. соб. вектором оператора $\frac{d}{dx}$ с соб. значением 0,
т.к. $\frac{d}{dx} c = 0 \quad (= 0 \cdot c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Опр. Спектром лин. оператора наз. мн-во всех его соб. значений.

Теорема об инвариантности хар. мн-на, хар. ур-я, следа и определителя лин. оператора

Хар. мн-н, хар. ур-е, след и det лин. оператора не зависят от выбора базиса лин. пр-ва.

Док-во.

Пусть A и A' – матрицы лин. опер. $\hat{A}: L \to L$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ лин. пр-ва L.

1) Рас. хар. многочлены $\chi_A(\lambda)$ и $\chi_{A'}(\lambda)$;
пусть $T \overset{\text{это}}{=} T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ мат. перех. от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$:

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda E) =$$

$$= \det(T^{-1}AT - \lambda \overbrace{T^{-1}ET}^{=E}) \overset{\text{по св-вам умножения матриц}}{=}$$

$$= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) =$$

$$= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det T =$$

взаимнообратные числа

$$= \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda),$$

т.е. хар. многочлены совпадают

2) Совпадение хар. мн-в означает совпадение их коэфф-в $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ совпадение решений хар. ур-ий $\det \chi_A(\lambda) = 0$ и $\det \chi_{A'}(\lambda) = 0$.

3) Запишем хар. мн-н

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0,$$

где коэф-ты p_i не зависят от выбора базиса $\mathcal{E}$ или $\mathcal{E}'$.

Можно док-ть (не будем), что

$$\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} p_{n-1}, \quad \det A = p_0.$$

Поэтому $\operatorname{tr} A$ и $\det A$ также не зависят от выбора базиса.

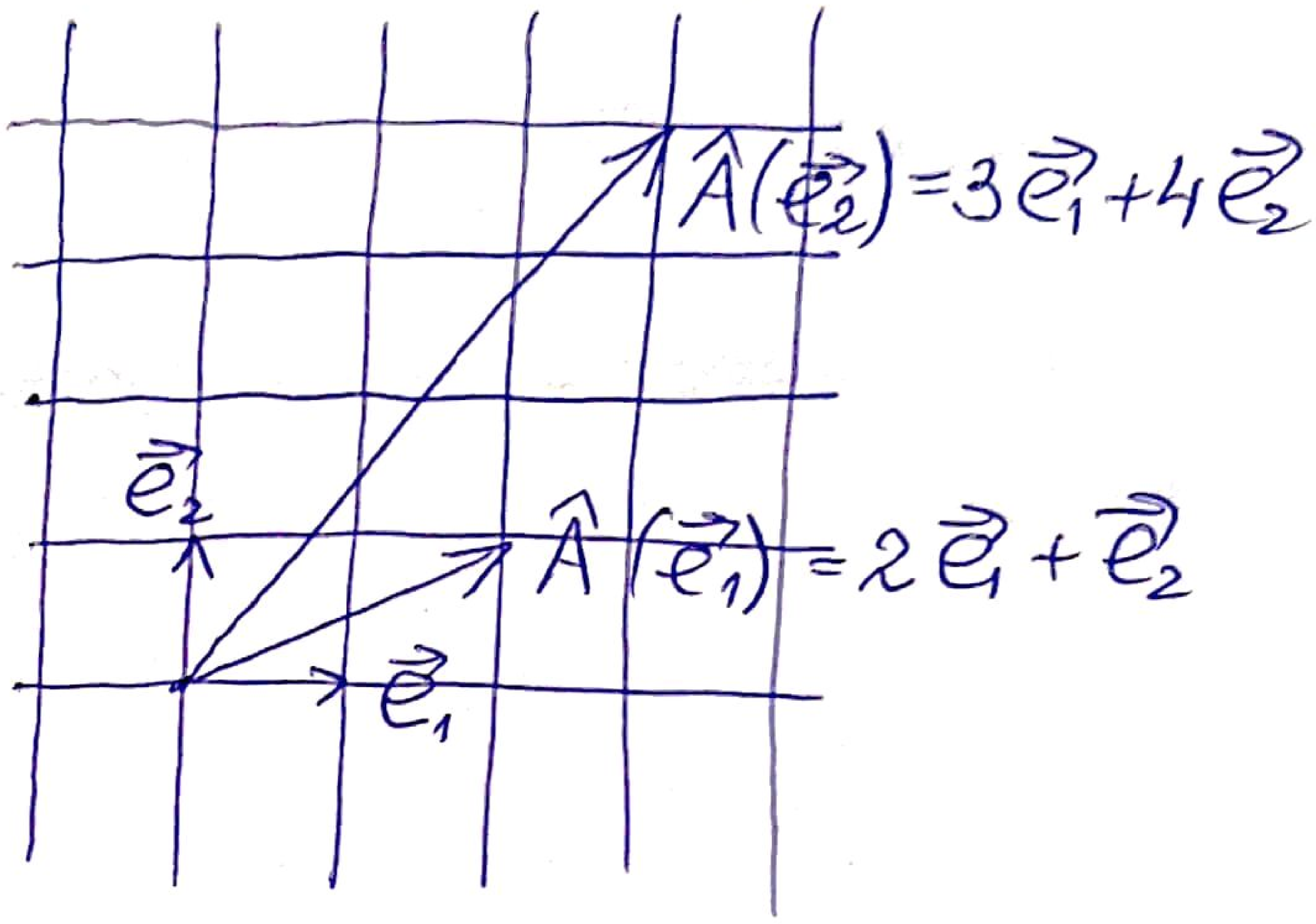
ч. т. д.

Пример.

Пусть $L = V_2$, базис $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ как на рисунке, оператор $\hat{A}: V_2 \to V_2$ имеет в базисе $\mathcal{E}$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

к-ты $\hat{A}(\vec{e}_1)$ $\hat{A}(\vec{e}_2)$
в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$



Выпишем
хар. многочлен: $\det(A - \lambda E) =$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(4-\lambda) - 1\cdot 3 = 8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5;$$

хар. уравнение: $\lambda^2 \underbrace{-6}_{p_1}\lambda + \underbrace{5}_{p_0} = 0$;

след оператора: $\operatorname{tr} A = 2 + 4 = 6 = (-1)^{2-1} p_1$;
определитель оператора: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 = p_0$.

Как найти соб. вектора и соб. значения линейного оператора?

Теорема. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ явл. собственным значением лин. оператора $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ λ явл. корнем хар. ур-я этого оператора.

Док-во (не входит в РК1) Пусть λ – соб. значение $\hat{A}: L \to L$. Это озн., что $\exists \vec{x} \in L$: $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\hat{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. (1)

Рас. тождественный оператор $I: L \to L$, т.е. $I(\vec{x}) = \vec{x}$ $\forall \vec{x} \in L$.

Перепишем (1) так: $\hat{A}(\vec{x}) = \lambda I(\vec{x})$

$$(\hat{A} - \lambda I)(\vec{x}) = \vec{0}$$

Для матриц операторов в нек. базисе $\mathcal{E}$:

$$\underbrace{(A - \lambda E)}_{\text{матрица оператора } \hat{A} - \lambda I} X = \Theta \quad (2)$$

(2) – это однородная СЛАУ.
Она имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0$,
что и озн., что λ – корень хар. ур-я лин. оператора.

ч.т.д.

Напоминание. Если $\det(A - \lambda E) \neq 0$, то по ф-лам Кра́мера найдём $X = \Theta$,
но мы ищем $\vec{x} \neq \vec{0}$.

<u>Следствие.</u> Ненулевой вектор $\vec{x} \in L$ явл. собственным вектором для лин. оператора

$$\hat{A}: L \to L$$

для собств. значения $\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ его координаты X в нек. базисе являются решением однородной СЛАУ $(A-\lambda E)X=\Theta$,

где A – матрица оператора $\hat{A}$ в этом базисе.

Опр. Собственным подпространством лин. оператора $\hat{A}: L \to L$ для собственного значения λ наз. мн-во всех соб. векторов $\hat{A}$, отвечающих соб. значению λ, с добавлением к этому мн-ву нулевого вектора $\vec{0}$.

Обозн. $L(\hat{A}, \lambda)$.

Теорема. $L(\hat{A}, \lambda)$ явл. линейным подпр-вом в лин. пр-ве L.

Опр. Алгебраической | Геометрической кратностью соб. значения λ оператора $\hat{A}$ наз.

Алгебраической	Геометрической
кратность λ как корня хар. ур-я $\det(A-\lambda E)=0$, где A — матр. $\hat{A}$ в любом базисе	размерность собственного подпр-ва $L(\hat{A}, \lambda)$, т.е. $\dim L(\hat{A}, \lambda)$.

Теорема. Геом кратность $\le$ $\le$ алгебр. кратности.

Теорема о линейной независимости соб. векторов, отвечающих различным соб. значениям.

Если собств. значения $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ лин. оператора $\hat{A}: L \to L$ попарно различны,

то система $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ соответств. им собств. векторов лин. независима.

Док-во (по индукции).

1. Пусть $r=1$ (т.е. λ_1 – только одно соб. значение)
$\Rightarrow$ соотв. соб. вектор $\vec{a}_1$ (т.к. он по опр. ненулевой) лин. независим.

2. Пусть верно для $r=m$,
т.е. для различных соб. значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m$$

соотв. соб. векторы

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$$

лин. независимы.

3. Док-м для $r=m+1$,
т.е. док-м что для разл. соб. значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$$

соотв. соб. векторы

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}$$

лин. независимы.

Рас. $\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_m\vec{a}_m+\alpha_{m+1}\vec{a}_{m+1}=\vec{0}$ (1).

Применим к левой и правой части (1) оператор $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_m\vec{a}_m+\alpha_{m+1}\vec{a}_{m+1})=\hat{A}(\vec{0})$$

Из опр. лин. оператора и следствия из него (см. пред. лекцию):

$$\alpha_1\hat{A}(\vec{a}_1)+\ldots+\alpha_m\hat{A}(\vec{a}_m)+\alpha_{m+1}\hat{A}(\vec{a}_{m+1})=\vec{0}$$

$$\alpha_1\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_m\lambda_m\vec{a}_m+\alpha_{m+1}\lambda_{m+1}\vec{a}_{m+1}=\vec{0} \quad (2)$$

Рас. разность ур-ий: (2) $-\lambda_{m+1}\cdot$(1):

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{m+1})\vec{a}_1+\ldots+\alpha_m(\lambda_m-\lambda_{m+1})\vec{a}_m+\alpha_{m+1}\underbrace{(\lambda_{m+1}-\lambda_{m+1})}_{\substack{\parallel\\0}}\vec{a}_{m+1}=\vec{0}$$

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{m+1})\vec{a}_1+\ldots+\alpha_m(\lambda_m-\lambda_{m+1})\vec{a}_m=\vec{0}.$$

Т.к. по предположению индукции (см. п.2) $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ лин. независ., то

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_{m+1})=0 \quad \forall i=1,\ldots,m.$$

След., $\alpha_i=0$ или $\lambda_i-\lambda_{m+1}=0$,
т.е. $\lambda_i=\lambda_{m+1}$.
Но последнее невозм., т.к. по усл. все $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1}$ различны.

Останется $\boxed{\alpha_i=0 \quad \forall i=1,\ldots,m}$

Подставив в (1), получим $\alpha_{m+1}\vec{a}_{m+1}=\vec{0}$.
Т.к. соб. вектор по опр. ненулевой, то $\vec{a}_{m+1}\neq\vec{0}$. След, $\boxed{\alpha_{m+1}=0}$. Это озн, что $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m,\vec{a}_{m+1}$ лин. независ.

ч.т.д.

Матрица оператора в базисе из соб. векторов

Частный сл. Пусть оператор $\hat{A}: L \to L$, где $\dim L = n$, имеет n различных соб. значений. Тогда $\hat{A}$ имеет в L n ~~∃~~ лин. независ. соб. векторов, отвечающих этим соб. значениям. Примем их за базис L и запишем матрицу $\hat{A}$ в этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$\hat{A}(\vec{e_n}) = \lambda_n \vec{e_n}$

$\hat{A}(\vec{e_1}) = \lambda_1 \vec{e_1} = \lambda_1 \vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 0\vec{e_3} + \dots + 0\vec{e_n}$

$\hat{A}(\vec{e_2}) = \lambda_2 \vec{e_2}$ $\qquad$ $\hat{A}(\vec{e_3}) = \lambda_3 \vec{e_3}$

т.е. A – диагональная матрица, и действие оператора $\hat{A}$ в базисе из собств. векторов (если они ∃) становится „яснее": все соб. векторы $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ переходят в коллин. векторы $\lambda_1 \vec{e_1}, \dots, \lambda_n \vec{e_n}$.

Сканировано с CamScanner

План нахождения соб. значений λ_k и соб. подпространств $L(\hat{A}, \lambda_k)$.

1) Записать матрицу A оператора $\hat{A}$ в каком-нибудь базисе $\mathcal{E}$.

2) Решить хар. ур-е: $\det(A - \lambda E) = 0$.
Его действит. корни будут соб. значениями оператора $\hat{A}$.

3) $\forall$ соб. значения λ_k найти все $\vec{x}$:
$$\hat{A}(\vec{x}) = \lambda_k \cdot \vec{x}.$$
Для этого решить ур-е (в матр. форме)
$$AX = \lambda_k X$$
$$(A - \lambda_k E)X = \Theta$$
Это однородная СЛАУ. Её решением явл. соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda_k)$.
ФСР однородной СЛАУ будет базисом в $L(\hat{A}, \lambda_k)$.

Зам. Если α – алгебр. кратность λ_k,
β – геом. кратность λ_k,
($\beta = \dim L(\hat{A}, \lambda_k) =$ кол-во ФСР),
то $\beta \le \alpha$.

Пример (продолжение примера на с. 4)

1) Найдём соб. значение оператора $\hat{A}$ из хар. уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+5=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=5$$

2) Найдём соб. векторы оператора $\hat{A}$ из однородной СЛАУ

$$(A-\lambda E)X=\Theta .$$

Для $\lambda_1=1$ запишем $(A-E)X=\Theta$

$$\left(\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-1&0\\1&4-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Зам. $\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}$

$$x+3y=0$$

$$\begin{cases}x=-3y\\y=y\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-3c\\y=c\end{cases}, \ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}c, \ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Для $\lambda_2=5$ запишем $(A-5E)X=\Theta$

$$\begin{pmatrix}2-5 & 3\\ 1 & 4-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Зам. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

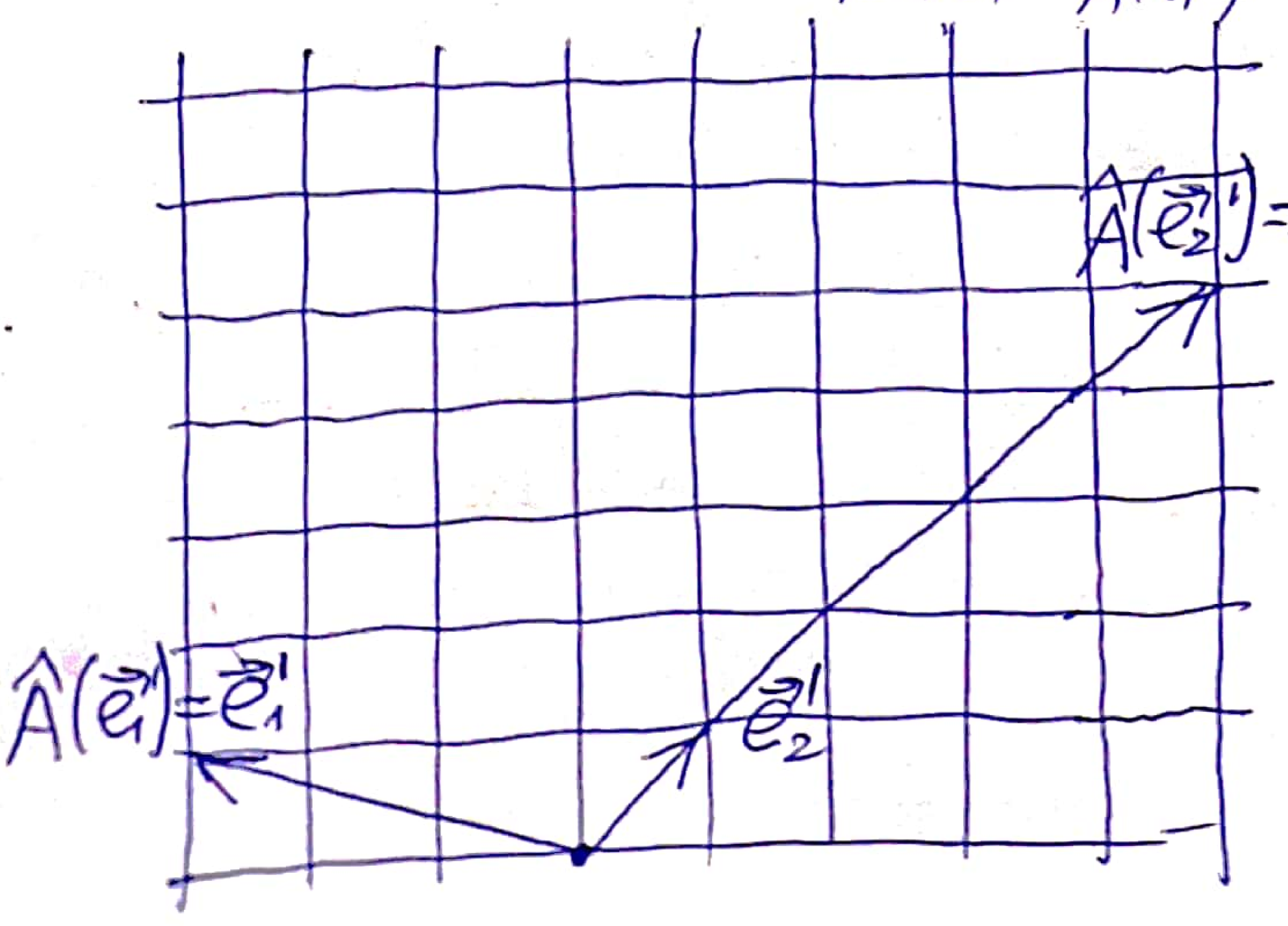
$x-y=0$ $\quad \begin{cases}x=y\\ y=y\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=c\\ y=c\end{cases}, c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}c,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

3) Соб. векторы, отвечающие различным соб. значениям, лин. независимы. Возьмём $\vec{e}_1{}'=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}'=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ в качестве нового базиса $\mathcal{E}'$ пр-ва V_2. Запишем матрицу A' оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{E}'$:

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

к-ты $\hat{A}(\vec{e}_1{}')$ $\hat{A}(\vec{e}_2{}')$ в базисе $\mathcal{E}'$.



Зам., что в этом примере и для $\lambda_1=1$, и для $\lambda_2=5$ алгебр. кратность = геом. кратности = 1