Лекция 7 по ЛА

Квадратичные формы

<u>Опр.</u> Пусть L – n-мерное линейное пр-во, $\mathcal{E}$ – базис в L.
<u>Квадратичной формой</u> в L наз. наз. функция $Q: L \to \mathbb{R}$, которая каждому $\vec{x} \in L$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ в базисе $\mathcal{E}$ ставит в соответствие действит. число

(1) $$Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ где } a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j.$$

Квадр. форму можно также записать в виде

(1') $$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

<u>Опр.</u> <u>Матрицей квадр. формы</u> наз. симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

из коэффициентов квадр. формы.

Квадр. форму можно записать в виде

(2) $$Q(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X,$$

где $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ - столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе $\mathcal{E}$, A - матрица квадр. формы.

Записи (1), (1') и (2) наз. <u>координатной</u> и <u>матричной</u> записями квадр. формы соответственно.

<u>Теорема о преобразовании матрицы квадр. формы при переходе к новому базису.</u>

Пусть A и A' - матрицы квадр. формы в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ лин. пр-ва L, $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ - матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

Тогда $A'=(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^T A\,T$.

Док-во. Найдём связь между A и A' из условия, что значение $Q(\vec{x})$ не зависит от выбора базиса, т.е.

$$Q(\vec{x}) = X^T A X \quad (3), \quad Q(\vec{x}) = (X')^T A' X' \quad (4)$$

где X и X' - координаты $\vec{x}$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$.

По формулам преобразования коор-т

$$X = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}X'. \quad (5)$$

Подставим (5) в (3):

$$Q(\vec{x}) = (T_{\varepsilon\to\varepsilon'} \cdot X')^T A (T_{\varepsilon\to\varepsilon'} X') \overset{\text{св-во } (AB)^T = B^T A^T}{=}$$

$$= (X')^T (T_{\varepsilon\to\varepsilon'})^T A (T_{\varepsilon\to\varepsilon'} X') \overset{\text{по ассоц-ти умнож. матриц}}{=}$$

$$= (X')^T ((T_{\varepsilon\to\varepsilon'})^T A (T_{\varepsilon\to\varepsilon'})) X^T.$$

Сравнивая с (4), получаем

$$A' = (T_{\varepsilon\to\varepsilon'})^T A (T_{\varepsilon\to\varepsilon'}).$$

ч.т.д.

Опр. Говорят, что для квадр. формы $Q(\vec{x})$ её вид $Q(\vec{x}) = (X')^T A' X'$ получен из её вида $Q(\vec{x}) = X^T A X$ с помощью линейной невырожденной замены переменных $X = T_{\varepsilon\to\varepsilon'} X'$. Зам. $\det T_{\varepsilon\to\varepsilon'} \neq 0$.

т.к. это матрица перехода

Опр. Рангом квадр. формы наз. ранг её матрицы. Квадр. форма наз. невырожденной, | вырожденной, если

$rg A = n$ | $rg A < n$.

Теорема. Ранг квадр. формы не меняется при лин. невырожд. заменах переменных.

Док-во. При умножении на невырожд. матрицу ранг матрицы не меняется. След., $rg\, A' = rg\, A$.

Опр. Квадр. формой канонич. вида наз. квадратичная форма вида

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{R},$$

не имеющая попарных произведений переменных.

Теорема. Любую квадр. форму можно привести к канонич. виду с помощью линейной невырожд. замены перем-х.

Док-во проведём позже 2-мя способами.

I сп. Метод Лагранжа

II сп. Метод ортогональных преобр-ий.

Канонич. вид квадр. формы определяется неоднозначно.

<u>Теорема</u> (<u>Закон инерции квадр. форм</u>) (без док-ва)

Для любых двух канонич. видов одной и той же квадр. формы

$Q(\vec{x}) = \alpha_1 x_1'^2 + \ldots + \alpha_m x_m'^2$, $\alpha_i \neq 0, i = 1, \ldots, m$,

$Q(\vec{x}) = \beta_1 x_1''^2 + \ldots + \beta_k x_k''^2$, $\beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, k$

1) $m = k$ = рангу квадр. формы,

2) количество положит. коэф-в α_i равно количеству положит. коэф-в β_j,

3) количество отрицат. коэф-в α_i равно количеству отрицат. коэф-в β_j.

Опр. Квадр. форма $Q(\vec{x})$ наз.

① положительно | отрицательно
определённой,
если $\forall \vec{x} \in L$, $\vec{x} \neq \vec{0}$,
$Q(\vec{x}) > 0$ | $Q(\vec{x}) < 0$

② неотрицательно | неположительно
определённой,
если $\forall \vec{x} \in L$
$Q(\vec{x}) \geq 0$ | $Q(\vec{x}) \leq 0$
и $\exists \ \vec{x} \neq \vec{0}$:
$Q(\vec{x}) = 0$ | $Q(\vec{x}) = 0$

③ знакопеременной (или неопределённой),
если $\exists \vec{x}$ и $\vec{y} \in L$: $Q(\vec{x}) > 0$, $Q(\vec{y}) < 0$

Зависимость типа формы от собственных значений её матрицы

положит. опред.	$\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$
Отрицат. опред.	$\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$
Знакопеременная	$\exists \lambda_i > 0$ и $\exists \lambda_j < 0$
Невырожденная	$\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$
Вырожденная	$\exists \lambda_i = 0$

Рас. невырожденные квадр. формы (положит. опред., отрицат. опред. и невырожд. знакопеременные)

<u>Опр. Угловыми минорами матрицы A квадр. формы</u> наз. миноры

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Зам.</u> $\Delta_n \neq 0$ для невырожд. кв. форм

<u>Теорема</u> (<u>Критерий Сильвестра</u>)

Квадр. форма от n переменных положит. определена $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

<u>Следствие</u> ① Квадр. форма от n перем. отрицат. определена $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$ (т.е. знаки чередуются, начиная с минуса)

② Невырожд. квадр. форма от n перем. знакопеременная $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ она не явл. положит. и отрицат. определённой, т.е. выполн. хотя бы одно из условий:

1) один из угл. миноров равен нулю,
2) один из угл. миноров чётного порядка меньше нуля,
3) два угл. минора нечётного порядка имеют разные знаки.

Метод Лагранжа приведения квадр. формы к каноническ. виду

заключается в последовательном выделении полных квадратов.

Дана $Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j$

1 случай: $a_{11} \neq 0$

1) Соберём все слагаемые, содерж. x_1 и дополним их до полного квадрата.

$Q(\vec{x}) = Q(x_1, \dots, x_n) =$

$= a_{11}\left(x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_1 x_j\right) + \sum_{i=2}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=2 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j =$

$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 + Q(x_2, \dots, x_n)$

2) В квадр. форме $Q(x_2, \ldots, x_n)$, если она содержит x_2^2, также выделим полный квадрат по x_2:

$$Q(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a'_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=2 \\ i<j}}^{n} a'_{ij} x_i x_j =$$

$$= a'_{22}\left(x_2^2 + 2\sum_{j=3}^{n} \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} x_2 x_j\right) + \sum_{i=3}^{n} a'_{ii} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=3 \\ i<j}}^{n} a'_{ij} x_i x_j =$$

$$= a'_{22}\left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} x_j\right)^2 + Q(x_3, \ldots, x_n)$$

и т.д.

3) Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \\ x_2' = x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} x_j \\ \vdots \\ x_r' = x_r + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{a^{(r)}_{rj}}{a^{(r)}_{rr}} x_j \\ x'_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ x'_n = x_n \end{cases}$$

Это лин. невырожд. замена перем. (проверять не будем)

Получим канонич. вид формы $Q(\vec{x})$:

$$Q(\vec{x}) = a_{11}(x_1')^2 + a_{22}'(x_2')^2 + \dots + a_{rr}^{(r)}(x_r')^2 =$$
$$= \alpha_1(x_1')^2 + \dots + \alpha_r(x_r')^2.$$

2 случай: $a_{11} = 0$

Тогда возможны 2 подслучая

Подсл. А. $\exists\, a_{ii} \neq 0$, $i \neq 1$.

Тогда начинаем выделение полного квадрата, сод. x_i.

Подсл. Б. $a_{ii} = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$.

Тогда „создадим" квадраты переменных. Пусть, например, $a_{ij} \neq 0$.

Сделаем промежуточную замену переменных: $\begin{cases} x_i = x_i' + x_j' \\ x_j = x_i' - x_j' \end{cases}$, $x_k = x_k'$, $\begin{matrix} k \neq i \\ k \neq j \end{matrix}$

Тогда слагаемое

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ij}(x_i'^2 - x_j'^2) = a_{ij} x_i'^2 - a_{ij} x_j'^2.$$

Далее выделим полный квадрат по x_i' или x_j'.

И т.д.