Лекция 8.

Метод ортогональных преобразований приведения квадр. формы к канонич. виду

Пусть $Q(\vec{x})$ - квадр. форма, A - её матрица в некотором ортонормир. базисе $\mathcal{E}$. Т.к. A - симметрична, то $\exists$ ортогональная матрица C : $C^TAC = A'$, где A' - диагональная матрица (см. лекцию 6), причем её диаг. эл-ты явл. собств. значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, каковы их кратности. Но именно так преобразуются матрицы квадр. форм (см. лекцию 7). След., A' - матрица квадр. формы $Q(\vec{x})$ в другом ортонорм. базисе $\mathcal{E}'$, причём состоящем из собств. векторов матрицы A. Базис $\mathcal{E}'$ явл. ортонормир., т.к. $\mathcal{E}$ - ортонормир. базис, а C - ортогональная матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

<u>Опр.</u> Линейное невырожденное преобразование квадр. формы $Q(\vec{x}) = X^TAX$ в $Q(\vec{x}) = (X')^TA'X'$, где $A' = C^TAC$ и C - ортогон. матрица, наз. ортогональным преобразованием квадр. формы

План приведения квадр. формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Дана квадр. форма $Q(\vec{x}) = X^T A X$.

1) Найдём собств. значения матрицы A из решения характ. ур-я $|A-\lambda E|=0$

2) Найдём собств. векторы, соответствующие найденным собств. значениям.

3)

а) Если все $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны, то соотв. им собств. векторы ортогональны. Нормируем их, получим ортонормир. базис $\vec{e}_1{}', \dots, \vec{e}_n{}'$.

Запишем матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} \underset{\vec{e}_1{}'}{\Big(\ \Big)} & \cdots & \underset{\vec{e}_n{}'}{\Big(\ \Big)} \end{pmatrix}.$$

б) Если среди $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ есть кратное собств. значение, напр., λ_k имеет кратность p, то в собств. подпространстве, соответствующем λ_k, выберем систему p ортонормир. векторов. Это собств. подпр-во всегда p-мерно, а для выбора такой системы векторов, возможно, придётся применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Запишем матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & \underbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}_{p\ \text{раз}} & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_{E\to E'} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \cdots & \vec{e}_k{}' & \cdots & \vec{e}_{k+p}{}' & \cdots & \vec{e}_n{}' \end{pmatrix}$$

4) Выпишем канонич. вид квадр. формы

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$$

(некоторые из λ_i могут равняться нулю).

Матрицей ортогон. преобразования является найденная матрица $T_{E\to E'}$

Зам. Можно проверить, что $A' = (T_{E\to E'})^T A\, T_{E\to E'}$

Использование канонического вида квадр. формы и собственных значений матрицы квадр. формы

I. Теорема. Ранг квадр. формы равен

1) количеству коэффициентов, не равных нулю, в её любом канонич. виде.

2) количеству собств. значений, не равных нулю, любой матрицы квадр. формы (с учётом их кратности!)

II. Теорема о типе квадр. формы в зависимости от множества собств. значений её матрицы.

Тип квадр. формы	Множество собств. значений
Положительно определённая	Все собств. значения $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$
Отрицательно определённая	Все собств. значения $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$
Знакопеременная	Существуют собств. значения разных знаков. $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$
Вырожденная	Существует нулевое собств. значение: $\lambda_i = 0$
Неотрицательно определённая	Сущ. нулевое соб. значение $\lambda_i = 0$, все ненулевые соб. значения $\lambda_j > 0$
Неположительно определённая	Сущ. нулевое соб. значение $\lambda_i = 0$, все ненулевые соб. значения $\lambda_j < 0$.

Зам. 1. Знакоперем. квадр. формы бывают и вырожденные и невырожденные.

2. Крит. Сильвестра исп. только для невырожд. ф.

III. Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду.

Рас. арифметическое пр-во $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,\ldots,n\}$ — мн-во упорядоченных наборов из n действит. чисел.

Элементы $\mathbb{R}^n$ можно рас. как векторы $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на действит. числа (покоординатно). Тогда $\mathbb{R}^n$ — линейное пр-во. Если определить в $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное произведение

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

то $\mathbb{R}^n$ становится евклидовым пр-вом.

Элементы $\mathbb{R}^n$ можно рас. как точки $M(x_1, \ldots, x_n)$. Каждой паре точек $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ соответствует единств. вектор $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$. Для любых трёх точек A, B, C выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Если определить в $\mathbb{R}^n$

расстояние между любыми двумя точками A и B

$$|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{(\vec{AB}, \vec{AB})} = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_n-a_n)^2},$$

то $\mathbb{R}^n$ становится точечно-векторным евклидовым пр-вом.

Прямоугольной системой координат в $\mathbb{R}^n$ называется совокупность любой фиксированной точки O и ортонормир. базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Точка O называется началом системы координат. Координатами любой точки M называются координаты её радиус-вектора $\vec{OM}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

Опр. Поверхностью 2 порядка в $\mathbb{R}^n$ наз. мн-во точек из $\mathbb{R}^n$, координаты которых относительно некоторой прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют уравнению

$$(1) \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j}_{\text{квадратичная форма}} + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i}_{\text{линейная форма}} + c = 0,$$

где a_{ij}, b_i, $\mathbb{R}$ и хотя бы один из a_{ij} не равен нулю.

При $n=2$ | $n=3$

получим

в $\mathbb{R}^2$ | в $\mathbb{R}^3$

кривую | поверхность

второго порядка.

Ур-е пов-ти 2 порядка в $\mathbb{R}^n$ можно записать так:

(2) $$X^T A X + 2B^T X + c = 0,$$

где A - матрица квадр. формы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица линейной формы,

$c \in \mathbb{R}$.

Записи (1) и (2) наз. координатной и матричной записями ур-я пов-ти 2 пор.

Пусть уравнение пов-ти записано относит. некоторой прямоугольной системы координат $O\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ (т.е. OE).

Наша задача: найти новую прямоугольную систему координат $O'\vec{e}_1{}' \ldots \vec{e}_n{}'$ (т.е. $O'E'$), относит. которой ур-е т.с. же поверхности будет иметь более простой (канонический) вид; найти канонич. уравнение пов-ти.

Формулы преобразования координат точек при изменении системы коорд-т.

Пусть даны 2 системы координат $O\mathcal{E}$ и $O'\mathcal{E}'$, причём вторая система к-т задана относительно первой: O' имеет к-ты $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ отн. $O\mathcal{E}$, векторы $\vec{e}_1{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ базиса $\mathcal{E}'$ имеют координаты $\vec{e}_i{}' = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$. Пусть $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = (c_{ij})$ - матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

Пусть точка M имеет координаты $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ отн. $O\mathcal{E}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ отн. $O'\mathcal{E}'$.

Тогда $\boxed{X = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X' + X_0}$

Док-во.

Из условия $\Rightarrow \overrightarrow{OM}$ имеет коорд-ты $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ отн. $\mathcal{E}$,

$\overrightarrow{O'M}$ имеет коорд-ты $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ отн. $\mathcal{E}'$,

т.е. $\overrightarrow{OM} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{E} X$ **(3)**

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= (\vec{e}_1{}' \dots \vec{e}_n{}') \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \mathcal{E}' X' = (\mathcal{E} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}) X' = \mathcal{E}(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X') \\ \overrightarrow{OO'} &= (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \mathcal{E} X_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \mathcal{E} X_0 + \mathcal{E}(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X') = \mathcal{E}(X_0 + T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X')$ **(4)**

Сравнивая (3) и (4), в силу единственности разложения вектора по базису, получим

$$X = T_{\varepsilon\to\varepsilon'} X' + X_0.$$

ч.т.д.

Пользуясь этой формулой, можно показать, что квадр. форма поверхности в новой системе координат преобразуется по общему правилу преобразования квадр. форм. Это означает, что в системе координат $O'\varepsilon'$ ур-е квадр. формы будет иметь вид

$$(X')^T \underbrace{(T_{\varepsilon\to\varepsilon'})^T A T_{\varepsilon\to\varepsilon'}}_{A'} X' + 2D^T X' + c' = 0.$$

Будем подбирать $T_{\varepsilon\to\varepsilon'}$ так, чтобы A' была диаг. матрицей из собств. значений A.

Квадр. форма примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} d_i x_i' + c' = 0$$

Если ранг квадр. формы равен r, то среди λ_i только r ненулевых соб. чисел; пусть это первые r слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} d_i x_i' + c' = 0$$

Рас. отдельно слагаемые

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{r} d_i x_i',$$

выделим полные квадраты по всем x_i':

$$\lambda_i x_i'^2 + 2 d_i x_i' = \lambda_i \left(x_i'^2 + 2\frac{d_i}{\lambda_i} x_i' + \left(\frac{d_i}{\lambda_i}\right)^2 - \left(\frac{d_i}{\lambda_i}\right)^2\right) =$$

$$= \lambda_i \left(x_i' + \frac{d_i}{\lambda_i}\right)^2 - \frac{d_i^2}{\lambda_i}.$$

Подставим в квадр. форму:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(x_i' + \frac{d_i}{\lambda_i}\right)^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} d_i x_i' \underbrace{- \sum_{i=1}^{r} \frac{d_i^2}{\lambda_i} + c'}_{h} = 0$$

Дальнейшее упрощение уравнения зависит от d_i и h и может привести к одному из следующих ур-ий:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i''^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i''^2 = 1 \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i''^2 = x_{r+1}'' \qquad (7)$$

Уравнения (5), (6), (7) наз. каноническими уравнениями пов-ти 2-го порядка в $\mathbb{R}^n$.
Для $n=2$ и $n=3$ различные сочетания знаков λ_i и μ_i дадут нам 9 и 17 канонич. ур-ий кривых на пл. и поверхностей в пр-ве соответственно.

Системы координат, в которых написаны канонические уравнения, наз. <u>канонич. системами координат</u>.