Семинар 1 по ЛА

Базис линейного пр-ва
Матрица перехода
Формулы преобразования коорд-т векторов

№4.15.

Дано:

V_3 - мн-во свободных векторов пр-ва,

$\mathcal{B} = (\vec{e_1} = \vec{i}, \vec{e_2} = \vec{j}, \vec{e_3} = \vec{k})$ - базис в V_3,

$\mathcal{B}' = (\vec{e_1}' = \vec{i} + \vec{j}, \vec{e_2}' = \vec{i} - \vec{j}, \vec{e_3}' = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$,

$\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

① Док-ть, что $\mathcal{B}'$ - базис в V_3.

② Найти мат. перехода $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

③ Найти координаты $\vec{x}$ в базисе $\mathcal{B}'$.

Решение.

① Док-во

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - базис в V_3 $\Rightarrow$ V_3 - трёхмерное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ любой базис V_3 состоит из $3^х$ векторов и любая лин. незав. система из $3^х$ векторов явл. его базисом. (из теории)

1) $\mathcal{B}'$ состоит из $3^х$ векторов $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$.

2) Док-м, что векторы $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ лин. независимы.

Рас. лин. комб. $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$, равную $\vec{0}$:

$$\alpha_1 \vec{e_1}' + \alpha_2 \vec{e_2}' + \alpha_3 \vec{e_3}' = \vec{0}.$$

Подставим выражения для $\vec{e_i}'$ из условия:

$$\alpha_1(\vec{i}+\vec{j}) + \alpha_2(\vec{i}-\vec{j}) + \alpha_3(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}) = \vec{0}$$

Преобразуем:

$$(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\vec{i} + (\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)\vec{j} - \alpha_3\vec{k} = \vec{0}$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис в V_3 $\Rightarrow$ только их тривиальная лин. комб. равна $\vec{0}$. Получим

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ -\alpha_3=0 \end{cases}$$

Решим систему (любым способом), получим $\begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$

След., только трив. лин. комб. векторов $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ равна $\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ лин. независ.

Из 1), 2) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ — базис V_3.

② Мат. перехода $T_{B\to B'}$:

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

коорд-ты $\vec{e}_1{}'$ $\vec{e}_2{}'$ $\vec{e}_3{}'$ отн. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

③ Ф-лы преобр. к-т векторов: $X = T_{B\to B'} X'$,
где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – коорд-ты $\vec{x}$ отн. B и B'.

Из условия $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Получим ур-е относит. $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Это СЛАУ, запис. в матричной форме.
Решим СЛАУ.

I сп. $(T_{B\to B'})^{-1} X = X'$.

Найдём $(T_{B\to B'})^{-1}$ каким-нибудь способом

$$(T_{B\to B'} | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\text{элемент. преобр-е строк}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (E | (T_{B\to B'})^{-1}).$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{(T_{B\to B'})^{-1}}$$

Сканировано с CamScanner

След., $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

След., $\vec{x}' = \frac{1}{2}\vec{e}_1{}' - \frac{3}{2}\vec{e}_2{}' - 2\vec{e}_3{}'$.

II сп. Запишем СЛАУ в коорд. виде

$$\begin{cases} x' + y' - z' = 1 & (1) \\ x' - y' + 2z' = -2 & (2) \\ -z' = 2 & (3) \end{cases}$$

и решим каким-нибудь способом (напр. по правилу Крамера)

Здесь легче решить подстановкой

$(3) \Rightarrow z' = -2$

Подставим в (1) и (2):

$$\begin{cases} x' + y' + 2 = 1 \\ x' - y' - 4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + y' = -1 \\ x' - y' = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

След., $\begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{3}{2} \\ z' = -2. \end{cases}$

Ответ: $T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\vec{x} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right\}$ в базисе B'!

~ №4.17.

Дано: V_3

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

$\vec{i}' = \vec{j}, \ \vec{j}' = \vec{k}, \ \vec{k}' = \vec{i}.$

Написать матр. перехода $T_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Решение.

$$T_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

коорд-ты $\vec{i}'$ $\vec{j}'$ $\vec{k}'$ отн. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\boxed{\text{Д/З I №4.16, 4.30}}$

Задача.

Пусть правый базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ поворачивается

(1) вокруг $\vec{i}$ на угол φ в положит. направлении (т.е. против часовой стрелки, если смотреть из конца $\vec{i}$),

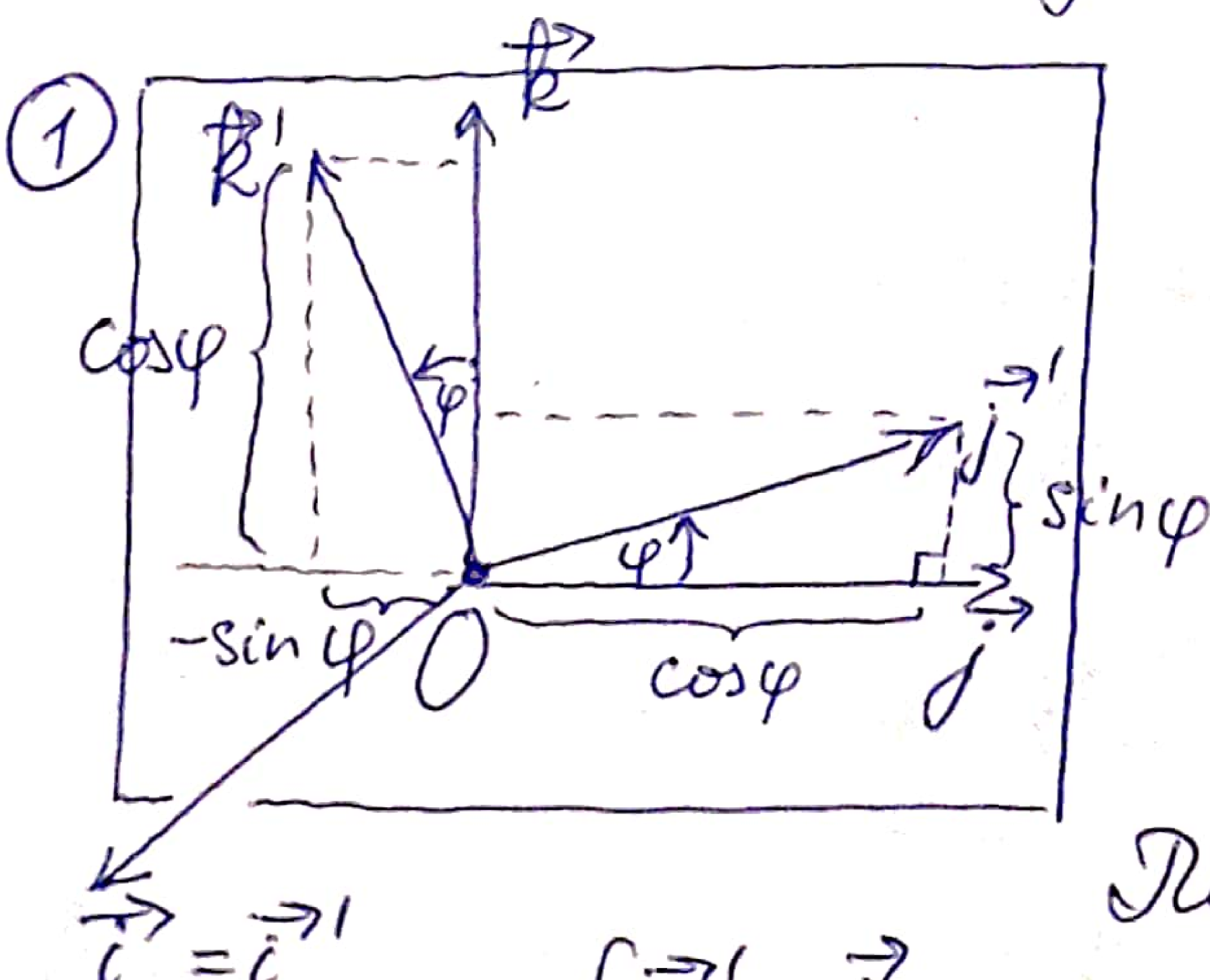
(2) вокруг $\vec{j}$ на угол φ в положит. направлении,

(3) вокруг $\vec{k}$ на угол φ в положит. направлении.

Найти матрицы перехода $T_{B \to B'}$ во всех трёх случаях (от $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ к $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$).

Решение. Рисунок для острого φ.

(1)



$\vec{j}' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ отн. $\vec{j}, \vec{k}$

$\vec{k}' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$ отн. $\vec{j}, \vec{k}$

$\Downarrow$

$\vec{j}' = \cos\varphi \cdot \vec{j} + \sin\varphi \cdot \vec{k}$

$\vec{k}' = -\sin\varphi \cdot \vec{j} + \cos\varphi \cdot \vec{k}$

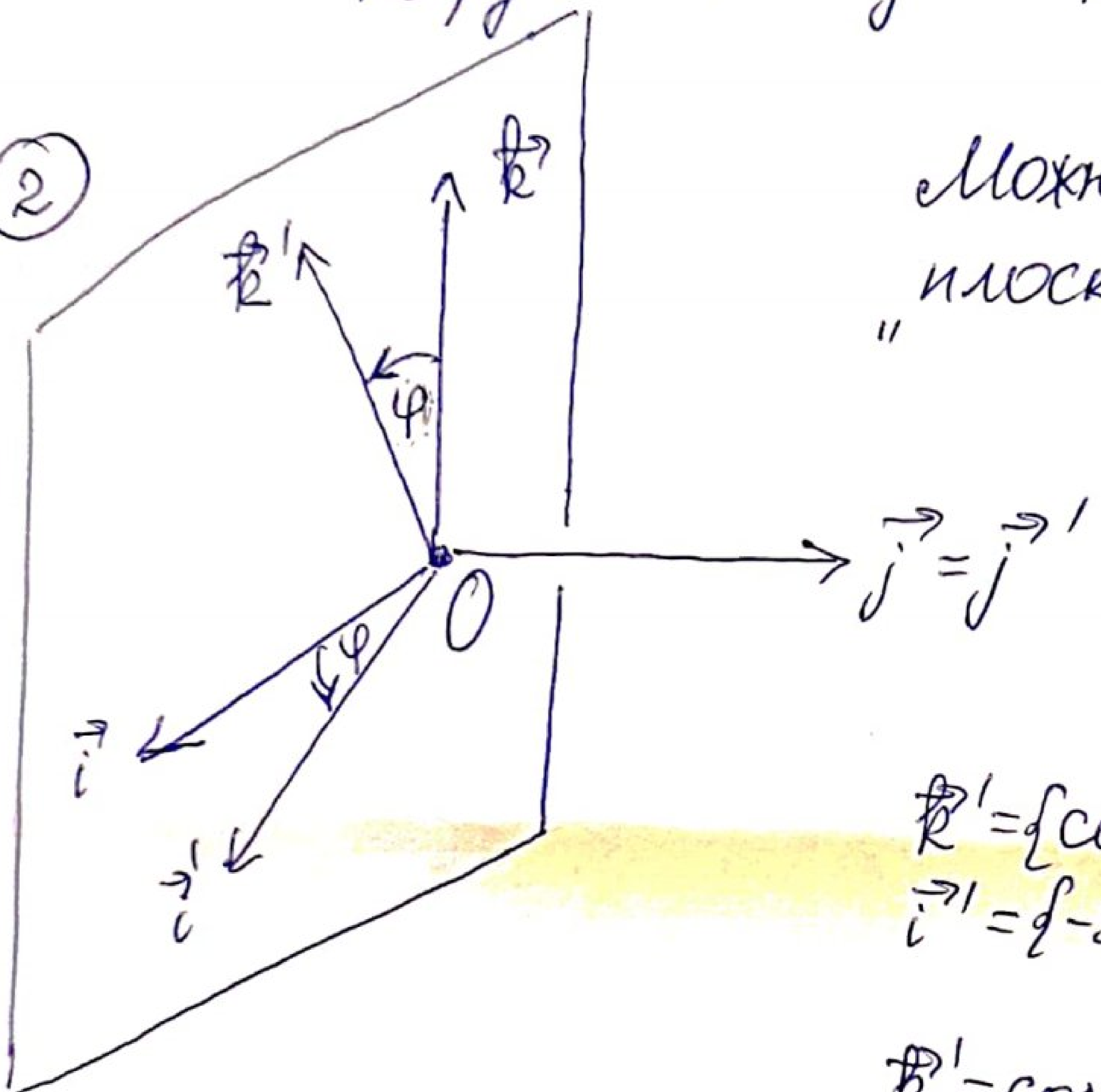
Получим

$$\begin{cases} \vec{i}' = \vec{i} \\ \vec{j}' = \cos\varphi \cdot \vec{j} + \sin\varphi \cdot \vec{k} \\ \vec{k}' = -\sin\varphi \cdot \vec{j} + \cos\varphi \, \vec{k} \end{cases}$$

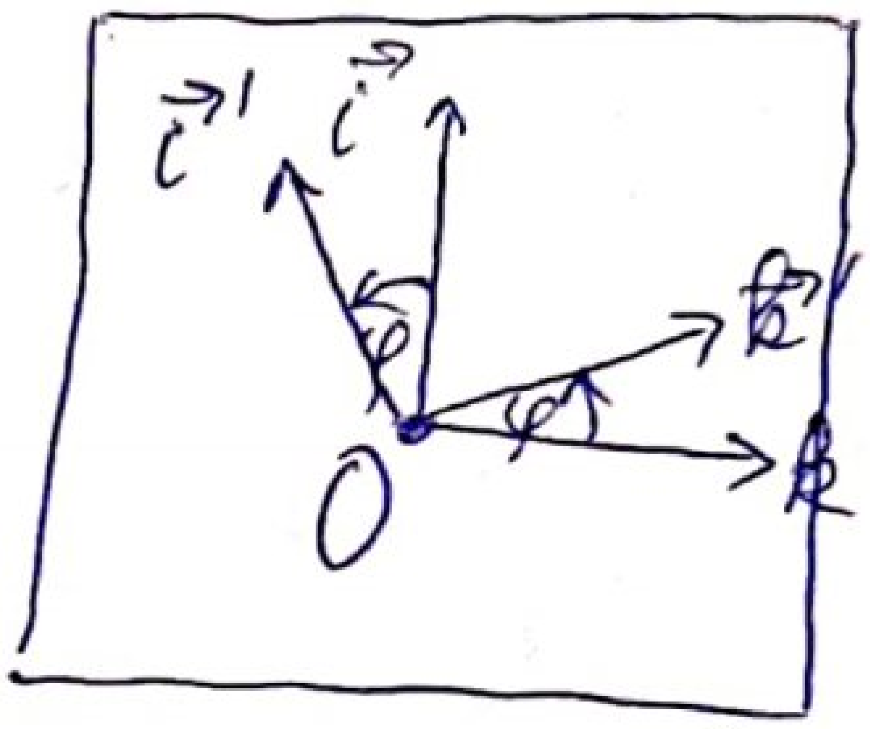
След., $T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

коорд-ты $\vec{i}\,'$ $\vec{j}\,'$ $\vec{k}\,'$ отн. $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$

2



Можно рас. „плоский рисунок":



$\vec{k}\,' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ отн. $\vec{k}, \vec{i}$

$\vec{i}\,' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$ отн. $\vec{k}, \vec{i}$

$\Downarrow$

$\vec{k}\,' = \cos\varphi \cdot \vec{k} + \sin\varphi\, \vec{i}$

$\vec{i}\,' = -\sin\varphi\, \vec{k} + \cos\varphi\, \vec{i}$

Получим

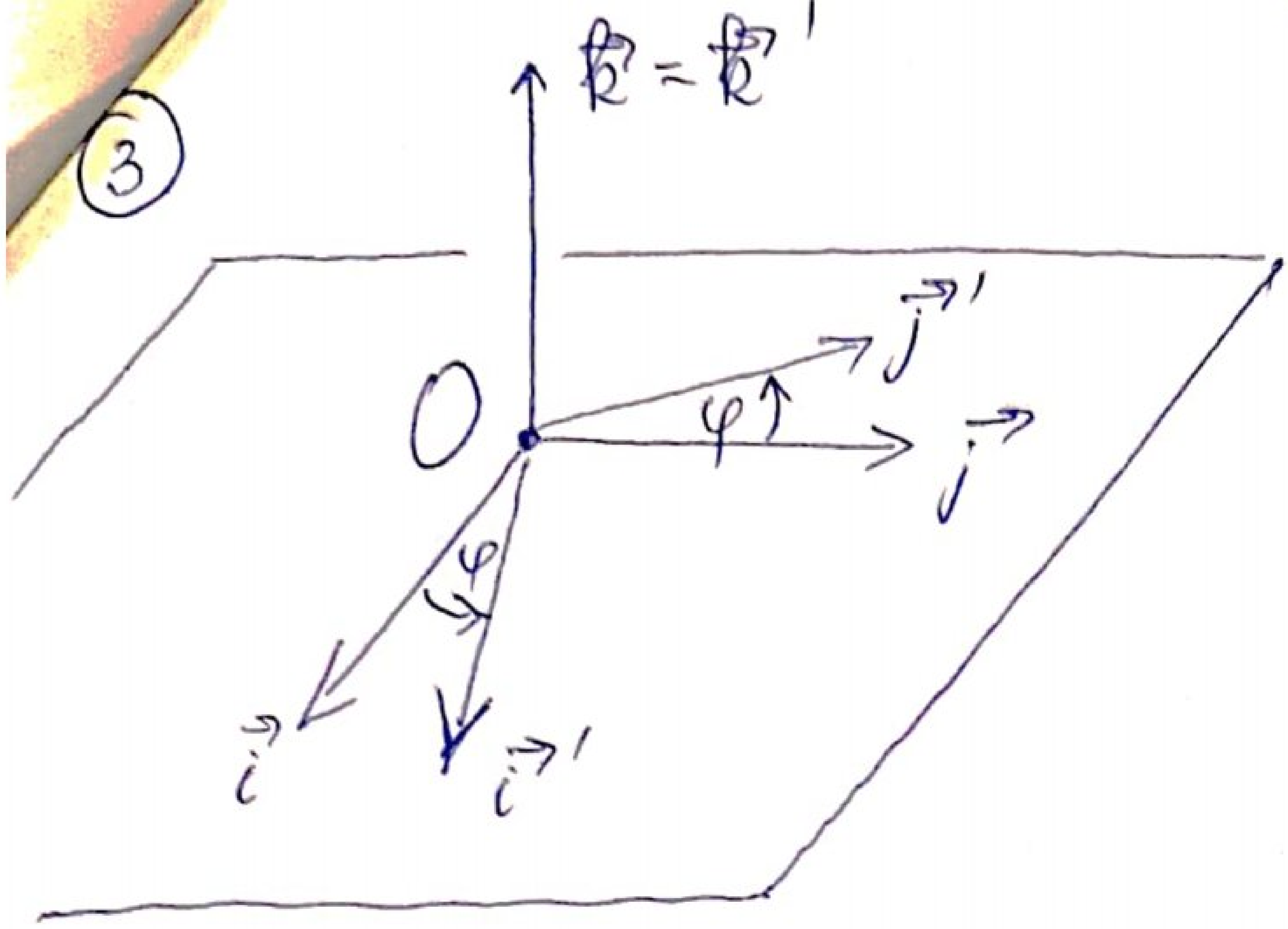
$$\begin{cases} \vec{i}\,' = \cos\varphi \cdot \vec{i} - \sin\varphi\, \vec{k} \\ \vec{j}\,' = \vec{j} \\ \vec{k}\,' = \sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{k} \end{cases}$$

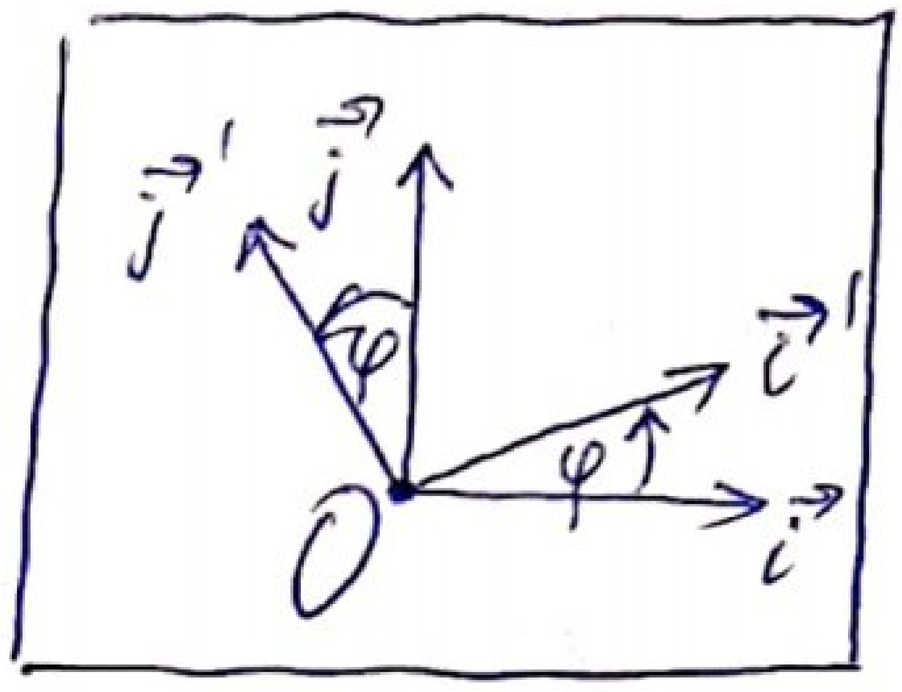
След., $T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

к-ты $\vec{i}\,'$ $\vec{j}\,'$ $\vec{k}\,'$ отн. $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$

Сканировано с CamScanner

(3)





$\vec i' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ отн. $\vec i, \vec j$

$\vec j' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$ отн. $\vec i, \vec j$

$\Downarrow$

$\vec i' = \cos\varphi \, \vec i + \sin\varphi \, \vec j$

$\vec j' = -\sin\varphi \, \vec i + \cos\varphi \, \vec j$

Получим

$$\begin{cases} \vec i' = \cos\varphi \cdot \vec i + \sin\varphi \, \vec j \\ \vec j' = -\sin\varphi \, \vec i + \cos\varphi \, \vec j \\ \vec k' = \vec k \end{cases}$$

След.,

$$T_{B \to B'} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \text{к-ты} & \vec i' & \vec j' & \vec k' \text{ отн. } \vec i, \vec j, \vec k \end{array} \end{array}$$

<u>Зам.</u> Если поворот на угол φ производится в отрицат. направлении, то вместо φ в $T_{B \to B'}$ писать $-\varphi$ и исп. чётность, нечётность

Сканировано с CamScanner

ДЗ II (1.) Задача 1

В лин. пр-ве V^3 свободных векторов выбран правый ортонормир. базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Этот базис поворачивается

1) вокруг $\vec{i}$ на угол $\varphi = 45°$ в отрицат. направлении,
получ. базис $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, а затем

2) вокруг $\vec{j}'$ на угол $\psi = 240°$ в положит. направлении,
получ. базис $\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''$.

Найти матр. перехода $T_{B \to B''}$.

Указание. Используйте св-в матр. перехода $T_{B\to B''} = T_{B\to B'} T_{B' \to B''}$.

(2) Задача 2 (аналог. задаче 1):

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ правый $\xrightarrow[\text{вокруг } \vec{k} \text{ против час. стрелки}]{\text{поворот на } 90°}$ $\mathcal{B}'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ $\xrightarrow[\text{вокруг } \vec{j}' \text{ по час. стрелке}]{\text{то же}}$ $\mathcal{B}''(\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$

Найти матр. перехода $T_{B\to B''}$.

(3) № 4.18.

Сканировано с CamScanner

№4.23 (а)

Дано:

$\mathcal{P}_n$ – пространство всех многочленов степени $< n$,

$1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ – система мног-в в $\mathcal{P}$.

$f(t) = -3t^2 + 1$

① Док., что данная система многочленов образует базис в $\mathcal{P}_n$ (этот базис наз. <u>каноническим</u>)

② Найти координаты многочлена $f(t)$ в пр-ве $\mathcal{P}_3$.

Решение.

① Док-во.

1) Док-м, что многочлены $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ линейно независимы.

Рас. равенство $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = 0$.

Док., что оно выполняется только для $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0$

Многочлены $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ определены на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ равенство должно выполняться $\forall t \in \mathbb{R}$

Пусть $t = 0 \Rightarrow \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0^2 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot 0^{n-1} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Сканировано с CamScanner

Равенство примет вид

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = 0$$

Возьмём производную от обеих частей равенства: $\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} t^{n-2} = 0$

Это посл. рав-во должно вып. $\forall t$. Пусть $t=0$, получим (аналог.)

$\alpha_1 = 0$ и т.д.

Дифференцируя равенство $n-1$ раз получим $\alpha_i = 0$ $\forall i$.

След., $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ лин. независ.

2) Любой многочлен степени $<n$ выражается через эту систему с нек. коэф-ми:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Из 1), 2) $\Rightarrow$ $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ базис в $\mathcal{P}_n$.

② Рас. $\mathcal{P}_3$.

Тогда $1, t, t^2$ – канонич. базис в $\mathcal{P}_3$.

Разложим $f(t) = -3t^2 + 1$ по этому базису: $f(t) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t - 3t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ имеет коорд-ты $\{1, 0, -3\}$ в канонич. базисе $\mathcal{P}_3$.

Сканировано с CamScanner

$\boxed{\text{Д/З III}}$ (1) № 4.23 (б)

4.28

(2) Задача.

В лин. пр-ве P_3 многочленов степени < 4 заданы базисы

$\mathcal{B} = (1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3)$ и

$\mathcal{B}' = (1, t+2, (t+2)^2, (t+2)^3)$.

Найти матрицу перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$.

$\approx$ №4.27.

Найти матрицу перехода от канонического базиса $1, t, t^2$ к базису $1, t-t_0, (t-t_0)^2$.

Решение.

Рас. 2 базиса

$\mathcal{B} = (e_0 = 1,\ e_1 = t,\ e_2 = t^2)$

$\mathcal{B}' = (e_0' = 1,\ e_1' = t - t_0,\ \vec{e}_2{}' = (t-t_0)^2)$

Разложим $\mathcal{B}'$ по $\mathcal{B}$:

$e_0' = e_0$

$e_1' = -t_0 \cdot 1 + 1 \cdot t = -t_0 e_0 + 1 e_1$

$\vec{e}_2{}' = (t-t_0)^2 = t^2 - 2tt_0 + t_0^2 = t_0^2 - 2t_0 t + t^2 =$

$= t_0^2 \cdot 1 - 2t_0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = t_0^2 e_0 - 2t_0 e_1 + 1 e_2$

$$\Rightarrow T_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -t_0 & t_0^2 \\ 0 & 1 & -2t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№4.28 (из ДЗ)

Найти координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе $1, t-1, (t-1)^2$.

Решение.

I сп. Разложим $f(t) = t^2 - t + 2$ по степеням $t-1$:

$f(t) = (t-1+1)^2 - (t-1+1) + 2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + \cancel{1} - (t-1) - \cancel{1} + 2 =$

$= (t-1)^2 + (t-1) + 2 = 2 + (t-1) + (t-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ имеет к-ты $\{2, 1, 1\}$ в базисе $1, t-1, (t-1)^2$.

II сп. Разложим $f(t)=t^2-t+2$ по степеням $t-1$ по формуле Тейлора:

$$f(t)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(t-1)+\frac{f''(1)}{2!}(t-1)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(t-1)^3$$

$f(1)=1^2-1+2=2$

$f'(t)=2t-1 \Rightarrow f'(1)=2\cdot 1-1=1$

$f''(t)=2 \qquad \Rightarrow f''(1)=2$

$f'''(t)=0$ и все след. производные $=0$.

След.,

$$f(t)=2+\frac{1}{1!}(t-1)+\frac{2}{2!}(t-1)^2=2+(t-1)+(t-1)^2$$

$\Rightarrow f(t)=\{2,1,1\}$ в базисе $1, t-1, (t-1)^2$.

III сп. По ф-ле преобр-я к-т векторов: $X=T_{B\to B'}X'$.

$f(t)=2-t+t^2 \Rightarrow f(t)=\{2,-1,1\}$ в базисе

$$\mathcal{B}=(1,t,t^2)$$

Найдём $f(t)=\{x',y',z'\}$ в базисе

$$\mathcal{B}'=(1,t-1,(t-1)^2)$$

Матрица перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$ (см. № 4.27):

$$T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Получим ур-е:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$ Решим так: $$\begin{cases}x'-y'+z'=2\\ y'-2z'=-1\\ z'=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'=2\\ y'=1\\ z'=1\end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$