Семинар 2 по ЛА
(продолжение тем семинара 1)

Задача 1.

Даны 2 базиса $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ заданы своими координатами относительно нек. базиса $\mathcal{E}$.
Найти матрицу перехода ① $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$,
② $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$.

Решение.

① 1) $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = T_{\mathcal{A}\to\mathcal{E}} \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}})^{-1} \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$,

по св-ву 3 матриц перехода (см. лекции)

по св-ву 2 матриц перехода.

где $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \ & \ \end{pmatrix}$, $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \ & \ \end{pmatrix}$

коорд-ты $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$ коорд-ты $\vec{b}_1$ $\vec{b}_2$

относит. базиса $\mathcal{E}$

2) Найдём $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}})^{-1}$ каким-нибудь способом, напр.,

$$(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}} \mid E) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{элем. преобр-я}}{\sim}} \left(E \mid (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{A}})^{-1}\right)$$

3) Подставим 2) в 1).

② I сп. $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}} = (T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}})^{-1}$, где $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ мы нашли в ①

II сп. Найдём $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$ аналогично как $T_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ в действии ①. Это дальше.

Задача 2.

Даны 2 базиса $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ заданы своими координатами относит. нек. базиса E. Даны координаты вектора $\vec{c}$

1. относит. базиса B. Найти коорд-ты $\vec{c}$ относит. базиса A

2. носит. базиса A. Найти коорд-ты $\vec{c}$ относит. базиса B.

Решение. По ф-лам преобр-я к-т векторов

1.
 1) $X_A = T_{A\to B} X_B$
 2) Найдём $T_{A\to B}$ как в задаче 1.
 3) Подставим 2) в 1).

2.
 1) $X_B = T_{B\to A} \cdot X_A$
 2) Найдём $T_{B\to A}$ как в задаче 1.
 3) Подставим 2) в 1).

Задача (как задача 2 только с числами).

Вектор $\vec{c}$ имеет координаты $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Найти его координаты в базисе $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

(1) По формулам преобр-е к-т векторов

$$X_B = T_{B\to A} X_A .$$

(2) 1) Найдём матр. перехода $T_{B\to A}$:

$$T_{B\to A} = T_{B\to E} \cdot T_{E\to A} = (T_{E\to B})^{-1} T_{E\to A}, \text{ где } E: \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ станд. базис},$$

$$T_{E\to B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{к-ты } \vec{b}_1\ \vec{b}_2 \text{ в баз. } E}, \quad T_{E\to A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{к-ты } \vec{a}_1\ \vec{a}_2 \text{ в баз. } E}$$

2) Найдём $(T_{E\to B})^{-1}$:

$$(T_{E\to B}|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |:7 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \,]+ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 \end{array}\right) \cdot (-4) \,]+ \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 \end{array}\right) \cdot (-7) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right) = \left(E \middle| (T_{E\to B})^{-1}\right)$$

3) Подставим 2) в 1):

$$T_{B\to A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}$$

3 Подставим $T_{B\to A}$ из 2 и $X_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ из усл. в 1:

$$X_B = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 19 \\ 33 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{ДЗ I}}$: **№1.** Найти матрицу перехода от базиса $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ к базису $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, где $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

№2 Вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, где $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Найти его координат в базисе $\mathcal{E}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, где $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

№4.37.

Ранг системы векторов и размерность её линейной оболочки.

Опр. Лин. оболочкой системы векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ наз. мн-во H всех лин. комбинаций этих векторов, т.е.
$H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

Обозн. $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$.

Опр. Рангом системы векторов в лин. пр-ве L наз. размерность лин. оболочки этой системы векторов.

Обозн. $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$

Т-ма $rg\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ равен
1) макс. кол-ву лин. независимых векторов в системе $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$;
2) $rg A$, где A-матрица из коорд-т $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ в любом базисе L.

№4.21

1. Док, что система векторов $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$ линейно зависима, и написать какое-нибудь нетривиальное соотношение $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$
2. Найти ранг и все базисы (лин. оболочки) этой системы.

Решение

Док-во. Найдём $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3$, не все равные 0:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0}.$$

Перепишем в координатах:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Упростим матрицу этой СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 10 \\ 4 & 1 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-4) \\ + \\ 1:5 \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1:2 \\ \\ 1:5 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3c \\ \alpha_2 = -2c, \ c \in \mathbb{R} \\ \alpha_3 = c \end{cases}$$

Это реш. сист. в коорд. виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R}$$

Это реш. сист. в вект. виде.

Например, при $c = 1$ $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$

Получим нетрив. соотношение

$$-3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}$$

Тем самым мы док-ли лин. зависим. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

(2) 1) Найдём $rg\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

$rg\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = rg\, A$, где A - матрица из координат векторов $\vec{x}_i$.

Найдём $rg\, A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 10 \\ 4 & 1 & 14 \end{pmatrix} \sim \text{элем. преобр. строк, см п. (1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$$\left.\begin{matrix} rg\, A' = 2 \\ rg\, A = rg\, A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow rg\, A = 2 \Rightarrow rg\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = 2$$

2) Из 1) $\Rightarrow$ макс. кол-во лин. независ. векторов в системе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ равно 2. Любые два вектора из $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ непропорц. $\Rightarrow$ их можно взять за базис лин. оболочки $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Ответ: $rg\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = 2$;
$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ или $\vec{x}_1, \vec{x}_3$ или $\vec{x}_2, \vec{x}_3$.

№4.51.

① Найти размерность линейной оболочки $L(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ арифметических векторов $\vec{x_1} = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{x_2} = (0, -1, 2, 0)$.

② Показать, что $\vec{x} = (1, -1, 4, -1) \in L(\vec{x_1}, \vec{x_2})$.

Решение.

① $\dim L(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = rg\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, т.е. макс. кол-ву лин. незав. векторов системы $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$.

Векторов всего два, они непропорциональны $\Rightarrow$ лин. независимы $\Rightarrow rang\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\} = 2$

$\Downarrow$

$\dim L(x_1, x_2) = 2$.

② Пок, что $\exists \alpha_1, \alpha_2 : \vec{x} = \alpha_1 \vec{x_1} + \alpha_2 \vec{x_2}$

(тогда $\vec{x} \in L(\vec{x_1}, \vec{x_2})$).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 = 1 \\ 0\alpha_1 - 1\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \\ -1\alpha_1 + 0\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вернёмся к сист. ур-ий: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$

След., такие $\alpha_1, \alpha_2 \; \exists \Rightarrow \vec{x} \in L(\vec{x_1}, \vec{x_2})$.

№ 4.53

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов:

$\vec{x_1} = (1, 1, 1, 1, 0)$

$\vec{x_2} = (1, 1, -1, -1, -1)$

$\vec{x_3} = (2, 2, 0, 0, -1)$

$\vec{x_4} = (1, 1, 5, 5, 2)$

$\vec{x_5} = (1, -1, -1, 0, 0).$

Решение.

$$\dim L(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_5}) = rg\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_5}\} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

← матрица из координат векторов (по столбцам)

Приведём матр. к ступ. виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad |\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 ступеньки $\Rightarrow$ rang $= 3 \Rightarrow \dim L = 3.$

Базисные столбцы: 1-й, 2-й, 5-й $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ базис лин. оболочки: $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_5}.$

ДЗ II

№3.

Найти базис и dim лин. оболочки системы векторов

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$.

№4.19