Семинар 4 по ЛА

Линейный оператор и его матрицы в разных базисах.

Опр. Отображение $\hat{A}: L \to L$, где L – лин. пр-во наз. лин. оператором, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \hat{A}(\vec{x}) + \beta \hat{A}(\vec{y}).$$

Опр. Пусть $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор, $\mathcal{E}$ – базис в L; пусть $\dim L = n$. Матрицей $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{E}$ наз. матрица

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}(\vec{e_1}) & \dots & \hat{A}(\vec{e_n}) \end{pmatrix}$$

$\hat{A}(\vec{e_1}) \dots \hat{A}(\vec{e_n})$ в базисе $\mathcal{E}$.

Теорема. Пусть A и A' – матрицы $\hat{A}$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матр. перех. от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

Тогда $A' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} A \, T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$,

т.е. $A' = T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} A \, T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

Задача 1.

Лин. оператор $\hat{A}$, действующий в нек. 2-dim пр-ве, в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу этого лин. оператора в базисе $\vec{e}_1{}' = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.

Решение.

1) $A = \begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ матрица $\hat{A}$ в баз. $\mathcal{E}$.

$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ матрица перех. от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$.

$$A' = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} A\, T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$

2) Найдём $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Зам. $\exists$ разные способы нах. обратной матрицы $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}$!

Можно так: $C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

(из общей ф-лы для C^{-1})

3) Подст. 2) в 1):

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & -30 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 4.106 (а).

В L^4 задан лин. оператор $\hat{A}$, матрица которого в нек. базисе $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{e_2}, \vec{e_4})$.

Решение.

1) $A' = T^{-1} A T$, где $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

блочная матр.

2) Найдём T^{-1}

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ т.к. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Подставим 2) в 1):

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{строки 2я и 3-я пом. местами}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{столбцы 2й и 3-й поменялись местами}}$$

Ответ.

ДЗ I. 1) Задача 1. Лин. оператор $\hat{A}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{e_1}' = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{e_2}' = \vec{e_1} - \vec{e_2}$

2) № 4.106 (б)

Задача 2.

Найти матрицу лин. оператора $\hat{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, если $\hat{A}$ переводит векторы $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ в векторы

$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Решение.

Пусть $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - матрица лин. оператора.

Тогда, т.к. $\hat{A}(\vec{a_i}) = \vec{b_i}$ $i = 1,2$, то

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём C.

I сп. 1) Решим матричное ур-е:

$$C \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

кратко: $CA = B$, где по столбцам матриц A и B записаны к-ты $\vec{a_i}$ и $\vec{b_i}$.

$$C = BA^{-1}$$

2) Найдём A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 3 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Подставим 2) в 1):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II сп. Решим систему ур-ий

$$\begin{cases} 3c_{11}+2c_{12}=1 & (1)\\ 3c_{21}+2c_{22}=3 & (2)\\ 2c_{11}+3c_{12}=-1 & (3)\\ 2c_{21}+3a_{22}=2 & (4)\end{cases}$$

Эту систему можно разбить на 2 системы: $\begin{cases}(1)\\(3)\end{cases}$ и $\begin{cases}(2)\\(4)\end{cases}$.

Решим их каким-нибудь способом:

$$\begin{cases} 3c_{11}+2c_{12}=1\\ 2c_{11}+3c_{12}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases} 3c_{21}+2c_{22}=3\\ 2c_{21}+3c_{22}=2\end{cases}$$

Напр., по правилу Крамера:

$\Delta=\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=5$	$\Delta=5$
$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=5$	$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=5$
$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-5$	$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&3\\2&2\end{vmatrix}=0$
$c_{11}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=1$	$c_{21}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=1$
$c_{12}=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-1$	$c_{22}=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=0$

След., $C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Д13II. Задача 2. Аналог. задача для } \vec{a_1}=(8,-5)^T,\ \vec{a_2}=(-3,2)^T,\ \vec{b_1}=(-5,4)^T,\ \vec{b_2}=(7,-3)^T.}$

№ 4.107.

В L^3 заданы 2 базиса
$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ и $\mathcal{B}'' = (\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}'', \vec{e}_3{}'')$
относит. нек. базиса $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
и матрица A' оператора $\hat{A}: L^3 \to L^3$
в базисе $\mathcal{B}'$.
Найти матрицу A'' оператора $\hat{A}$
в базисе $\mathcal{B}''$.

По условию
$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = 8\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2{}' = -16\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 13\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3{}' = 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \end{cases}$$
и
$$\begin{cases} \vec{e}_1{}'' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2{}'' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3{}'' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases};$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Д13 III Доделать № 4.107.}}$

Решение.

1 $A'' = T_{\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'} A' T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$

матрицы перехода

2 Найдём $T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$.

1) $T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = T_{\mathcal{B}' \to \mathcal{E}} \cdot T_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}''} =$
$= (T_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}'})^{-1} T_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}''}$,

где $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \vec{e}_3{}' \end{matrix}\end{array}$, $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}''} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{e}_1{}'' & \vec{e}_2{}'' & \vec{e}_3{}'' \end{matrix}\end{array}$

2) Найдём $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}'})^{-1}$ каким-нибудь способом. Напр., по правилу Крамера

$$\begin{cases} 8\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 = \vec{e}_1{}' \\ -16\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 13\vec{e}_3 = \vec{e}_2{}' \\ 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 = \vec{e}_3{}' \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 7 \\ -16 & 7 & -13 \\ 9 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1{}' & -6 & 7 \\ \vec{e}_2{}' & 7 & -13 \\ \vec{e}_3{}' & -3 & 7 \end{vmatrix} = \vec{e}_1{}'\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - \vec{e}_2{}'\begin{vmatrix} -6 & 7 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{e}_3{}'\begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\vec{e}_1{}' + 21\vec{e}_2{}' + 29\vec{e}_3{}'$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & \vec{e}_1{}' & 7 \\ -16 & \vec{e}_2{}' & -13 \\ 9 & \vec{e}_3{}' & 7 \end{vmatrix} = -5\vec{e}_1{}' - 7\vec{e}_2{}' - 8\vec{e}_3{}'$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & \vec{e}_1{}' \\ -16 & 7 & \vec{e}_2{}' \\ 9 & -3 & \vec{e}_3{}' \end{vmatrix} = -15\vec{e}_1{}' - 30\vec{e}_2{}' - 40\vec{e}_3{}'$$

След., $\begin{cases} \vec{e}_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2\vec{e}_1{}' + 4{,}2\vec{e}_2{}' + 5{,}8\vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\vec{e}_1{}' - 1{,}4\vec{e}_2{}' - 1{,}6\vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -3\vec{e}_1{}' - 6\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3{}' \end{cases}$

След., $\left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4{,}2 & -1{,}4 & -6 \\ 5{,}8 & -1{,}6 & -8 \end{pmatrix}$

3) Подставим 2) в 1):

$$T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4{,}2 & -1{,}4 & -6 \\ 5{,}8 & -1{,}6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

③ Найдём $T_{\mathcal{B}''\to\mathcal{B}'}$.

$$T_{\mathcal{B}''\to\mathcal{B}'} = \left(T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \text{каким-нибудь способом} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

④ Подставим ②, ③ и A' из условия в ①.

$$A'' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -13 & 7 \\ 6 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: ↗

№ 4.110 (а).

В пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени $< n$ задан линейный оператор дифференцирования $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$.

а) Найти матрицу этого оператора в базисе $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$.

Решение а).

Найдём образы векторов канонич. базиса под действием оператора $\mathcal{D}$:

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + \dots + 0\cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + \dots + 0\cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}(t^2) = 2t = 0\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2 + \dots + 0\cdot t^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}(t^{n-1}) = (n-1)t^{n-2} = 0\cdot 1 + 0\cdot t + \dots + 0\cdot t^{n-3} + (n-1)\cdot t^{n-2} + 0\cdot t^{n-1}$$

След., матрица оператора $\mathcal{D}$: (в канон. базисе)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Д/З IV № 4.110(б)}}$

б) Найти матрицу этого оператора в базисе $1, t-t_0, \frac{(t-t_0)^2}{2!}, \frac{(t-t_0)^3}{3!}, \ldots, \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Решение б).

Найдём образы векторов базиса под действием D:

$$\frac{d}{dt}(1)=0$$

$$\frac{d}{dt}(t-t_0)=1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-t_0)^2}{2!}\right)=\frac{2(t-t_0)}{2!}=t-t_0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-t_0)^3}{3!}\right)=\frac{3(t-t_0)^2}{3!}=\frac{(t-t)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{(n-1)(t-t_0)^{n-2}}{(n-1)!}=\frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

След., матрица оператора D в данном базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$