Семинар 5 по ЛА

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Матрица оператора в базисе из собств. векторов

Опр. Пусть $\hat{A}: L \to L$ лин. оператор в лин. пр-ве L. Вектор $\vec{x} \in L$ наз. собств. вектором оператора $\hat{A}$ с собств. значением $\lambda \in \mathbb{R}$, если 1) $\vec{x} \neq \vec{0}$ и

2) $\hat{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

Собств. подпр-вом лин. оператора $\hat{A}: L \to L$ для соб. значения λ наз. мн-во всех соб. векторов с собств. значением λ с добавлением к этому мн-ву $\vec{0}$.

Обозначение. $L(\hat{A}, \lambda)$. Это лин. подпр-во в L.

Соб. значения $\hat{A}$ явл. корнями хар. ур-я

$$|A - \lambda E| = 0, \text{ где}$$

A – матрица оператора $\hat{A}$ в к-н. базисе.

Соб. подпр-во явл. решением СЛАУ

$$AX = \lambda X \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)X = 0,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – коорд-ты векторов соб. подпр-ва $\hat{A}$

A – матрица оператора $\hat{A}$

в одном и том же базисе.

Задачи.

Найдите соб. значения и соб. векторы лин. оператора, заданного матрицей А в нек. базисе! Если возможно, то запишите матрицу оператора в базисе из собств. векторов. Если собств. векторов недостаточно, то укажите какой-нибудь базис, в котором матрица оператора имеет более простой вид.

№1.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Замечание. А – симм. матрица

Решение.

① Найдём соб. значения оператора.
Решим хар. ур-е:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(8-\lambda) - (-2)^2 = 0$$

$$\dots$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9$$

Соб. значения различны $\overset{\text{из теории}}{\Longrightarrow}$ соотв. им соб векторы лин. независ. $\Rightarrow$ из них можно составить базис. В этом базисе матрица оператора будет диагональной.

② Найдём соб. векторы $\vec{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

1) Для $\lambda_1 = 4$.

$$AX = 4X$$

$$(A-4E)X=\theta$$

$$\begin{pmatrix} 5-4 & -2 \\ -2 & 8-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Однородная СЛАУ в матр. форме. Обозн. через C матрицу системы.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C'$$

$rg\, C = rg\, C' = 1$. Решения однородной СЛАУ образуют лин. пр-во, его размерность $k = n - r$, где n – число неизвестных, r – ранг матрицы системы. У нас $k = 2 - 1 = 1$.

Вернёмся к системе:

$$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2c \\ x_2 = c \end{cases}, c \in R$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}c, \ c \in R$$

Мы нашли соб. подпр-во для соб. значения $\lambda_1 = 4$. Оно одномерное: $\dim L(\hat{A}, \lambda_1 = 4) = 1$.

2) Для $\lambda_2 = 9$.

$$AX = 9X$$

$$(A-9E)X=\theta$$

$$\begin{pmatrix} 5-9 & -2 \\ -2 & 8-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через D матрицу этой однородной СЛАУ.

$$D = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \, \end{matrix} + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D' \quad ; \quad rg D = rg D' = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Решения однородной СЛАУ образуют лин. пр-во (это соб. подпр-во для соб. знач. $\lambda_2 = 9$),

$\dim L(\hat{A}, \lambda_2 = 9) = n - r = 2 - 1 = 1.$

Вернёмся к системе:

$$2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -2c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} c, \, c \in \mathbb{R}$$

Итак, <u>для соб. знач. $\lambda_1 = 4$</u>

соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda_1 = 4) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R} \right\}$,

а мн-во всех соб. векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$;

<u>для соб. знач. $\lambda_2 = 9$</u>

соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda_2 = 9) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R} \right\}$,

а мн-во всех соб. векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$.

Напоминание.
Соб. векторы всегда $\neq \vec{0}$.

3. Выберем какой-нибудь базис из собств. векторов.

Из $L(\hat{A}, \lambda_1 = 4)$ возьмём $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

из $L(\hat{A}, \lambda_2 = 9)$ возьмём $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Матрица A' оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}(\vec{e}_1{}') = 4\vec{e}_1{}' = 4\vec{e}_1{}' + 0\vec{e}_2{}'$

$\hat{A}(\vec{e}_2{}') = 9\vec{e}_2{}' = 0\vec{e}_1{}' + 9\vec{e}_2{}'$

Ответ: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$;

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\right\}$ — соб. векторы для $\lambda_1 = 4$,

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0\right\}$ — соб. векторы для $\lambda_2 = 9$;

$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

№2.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{pmatrix}.$$

Решение.

① Найдём соб. значения оператора из хар. ур-я: $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 12 & -8-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(4-\lambda)(-8-\lambda)-12(-3)=0$$

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

$$(\lambda+2)^2=0$$

$\lambda_{1,2}=-2$ Соб. значение кратности 2.

② Найдём соб. векторы:

$$AX=-2X$$

$$(A+2E)X=\Theta$$

$$\begin{pmatrix}4+2 & -3\\ 12 & -8+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & -3\\ 12 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$ Однородная СЛАУ в матр. форме. Пусть

$C=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 12 & -6\end{pmatrix}\cdot(-2)+\sim\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}:3\sim\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=C'$; C – матрица СЛАУ.

$rg\,C=rg\,C'=1 \Rightarrow$ Решения однор. СЛАУ образуют лин. пр-во (это соб. подпр-во для соб. знач. $\lambda_{1,2}=-2$),

$\dim L(\hat{A},\lambda=-2)=n-r=2-1=1.$

Вернёмся к системе ур-ий:

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 2c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}.$$

Для соб. знач. $\lambda_{1,2} = -2$
соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda=-2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R} \right\}$,
а мн-во всех соб. векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$.

<u>Обсуждение</u>. Соб. значение $\lambda = -2$ имеет алгебраическую кратность $=2$ (как кратность корня хар. ур-е) и геометрическую кратность $=1$ ($\dim$ соб. подпр-ва $L(\hat{A}, \lambda=-2)$).
Всегда (из теории)
геом. кратность $\leq$ алгебр. кратность.

3 Выберем какой-нибудь базис, в кот. матрица оператора имеет более простой вид.
Пусть $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – соб. вектор.
В качестве $\vec{e}_2{}'$ возьмём любой вектор, непропорц. $\vec{e}_1{}'$!
Матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\hat{A}(\vec{e}_1{}') = -2\vec{e}_1{}'$

$\hat{A}(\vec{e}_2{}')$, находить не будем.

Ответ: $\lambda = -2$;

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}c, c\in\mathbb{R}, c\neq 0\right\}$ соб. векторы для $\lambda=-2$;

$A' = \begin{pmatrix}-2 & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$.

Д/З I. №1 (а) $A = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (б) $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ — условие как в задачах №1, №2 классной работы

№2 (а) $A = \begin{pmatrix}5 & 1\\ -9 & -1\end{pmatrix}$ (б) $A = \begin{pmatrix}12 & -22\\ 11 & -21\end{pmatrix}$ — Найти соб. знач. и соб. векторы только.

№3

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Решение. (1) Найдём соб. значения оператора из хар. ур-я:

$$|A-\lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

нет решений

$\Rightarrow$ оператор не имеет собств. значений

② Оператор не имеет собств. векторов, т.к. не имеет собств. значений.

Обсуждение. Здесь $A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ – матр. поворота на 60°.

При поворотах на угол $\varphi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ нет соб. чисел и соб. векторов

$\boxed{\text{Д/З II №3 ⓐ } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad ⓑ \; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

№4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. ① Найдём соб. значения лин. оператора из хар. ур-я $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{столбцу}}{\overset{\text{разложим по посл.}}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

$\lambda_{1,2} = 1$ кратное соб. значение $\quad \lambda_3 = 3$.

② Найдём соб. векторы.

1) Для $\lambda_{1,2} = 1$.

$$AX = 1 \cdot X$$

$$(A - 1E)X = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ это однор. СЛАУ.

Ур-я пропорциональны $\Rightarrow$ останется только

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C'$$

$rg\, C = rg\, C' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Решения однор. СЛАУ образуют лин. пр-во (это соб. подпр-во для $\lambda = 1$),
$\dim L(\hat{A}, \lambda = 1) = n - r = 3 - 1 = 2$.

Вернёмся к системе и найдём это подпр-во:

$$x_1 - x_2 + 0x_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

это ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) Для $\lambda = 3$

$$AX = 3X$$

$$(A-3E)X = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 \\ 1 & -1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Однор. СЛАУ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C'$$

$rg\, C = rg\, C' = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Решения этой однор. СЛАУ образуют лин. пр-во (соб. пр-во для $\lambda = 3$),

$\dim L(\vec{A}, \lambda = 3) = n - r = 3 - 2 = 1.$

Вернёмся к системе и найдём это подпр-во.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases}, c \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}$$

Итак, для соб. знач. $\lambda = 1$ алгебр. кратности 2
соб. подпр-во
$$L(\hat{A}, \lambda=1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$
мн-во всех собств. векторов
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \right\};$$

Обсуждение
Для $\lambda = 1$ алгебр. кратность = геом. кратности.

для соб. знач. $\lambda = 3$
соб. подпр-во
$$L(\hat{A}, \lambda=3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c,\ c \in \mathbb{R} \right\},$$
мн-во всех собств. векторов
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c,\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \right\}.$$

(3) Выберем базис из собств. векторов.
Из $L(\hat{A}, \lambda=1)$ возьмём 2 неколлинеарн. вектора, напр., $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Из $L(\hat{A}, \lambda=3)$ возьмём, напр., $\vec{e}_3{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица оператора в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ будет иметь вид:
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{1 \cdot \vec{e}_1{}'}{\underset{\parallel}{\hat{A}(\vec{e}_1{}')}} \quad \underset{1 \cdot \vec{e}_2{}'}{\underset{\parallel}{\hat{A}(\vec{e}_2{}')}} \quad \underset{3\vec{e}_3{}'}{\underset{\parallel}{\hat{A}(\vec{e}_3{}')}}.$$

ДЗ III № 4.142, 4.139.

№ 4.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Решение. ① Соб. значение: $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 4 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -3 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda-3)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ (алгебр. крат. 1), $\lambda_{2,3} = 3$ (алгебр. крат. 2)

② Соб. векторы:

1) Для $\lambda_1 = 2$: $(A - 2E)X = \Theta$

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 4 & 4 \\ 2 & 6-2 & 4 \\ -3 & -5 & -3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Однородная СЛАУ

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C'$$

$rg\,C = rg\,C' = 2 \Rightarrow \dim L(\hat{A}, \lambda = 2) = n - r = 3 - 2 = 1$

Вернёмся к системе и найдём соб. подпр-во:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -c \\ x_3 = c \end{cases}, c \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c, \; c \in \mathbb{R}$$

2) Для $\lambda_{2,3} = 3$: $(A - 3E)X = \Theta$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 4 & 4 \\ 2 & 6-3 & 4 \\ -3 & -5 & -3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C'$$

$rg\,C = rg\,C' = 2 \Rightarrow \dim L(\hat{A}, \lambda = 3) = n - r = 3 - 2 = 1.$

Вернёмся к системе и найдём соб. подпр-во:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \end{cases}, c \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}$$

Итак, для соб. знач. $\lambda = 2$ алгебр. крат. 1
соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda=2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R} \right\}$,

мн-во соб. векторов: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$,

для соб. знач. $\lambda = 3$ алгебр. крат. 2
соб. подпр-во $L(\hat{A}, \lambda=3) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R} \right\}$
мн-во соб. векторов $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$.

(3) Возьмём $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3{}'$ – любой, не явл. их лин. комб.

Матрица оператора в новом базисе:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

$$\hat{A}(\vec{e}_1{}') \quad \hat{A}(\vec{e}_2{}') \quad \hat{A}(\vec{e}_3{}')$$

Обсуждение
Т.к. $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ – соб. векторы, соотв. различным соб. значениям, то они лин. независ. (это и так видно, т.к. они непропорц.)

$\boxed{\text{ДЗ IV № 4.175.}}$