Семинар 6 по ЛА.

Диагонализация симметричных матриц ортогональным преобразованием.

1. Пусть A – матрица оператора $\hat{A}: L \to L$ в некотором базисе $\mathcal{E}$ и A – симметричная.

Тогда $\exists$ базис $\mathcal{E}'$ из собств. векторов оператора $\hat{A}$, в котором матрица A' оператора будет диагональна:

$$\underset{\text{диаг.}}{A'} = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} \underset{\text{симм.}}{A}\, T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.$$

2. Пусть A – матрица оператора $\hat{A}: L \to L$ в нек. ортонормир. базисе $\mathcal{E}$ и A – симметричная.

Тогда $\exists$ ортонормир. базис $\mathcal{E}'$ из собств. векторов оператора $\hat{A}$, в котором матрица A' оператора будет диагональна:

$$\underset{\text{диаг.}}{A'} = (T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} \underset{\text{симм.}}{A}\, T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.$$

Т.к. $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ ортонормир. базисы, то матр. перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ явл. ортогональна, т.е. $\left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1} = \left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{T}$.

След., $\underset{\text{диаг.}}{A'} = \left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{T} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

3. Опр. Диагонализацией матрицы A наз. преобразование

$$T^{-1}AT = A',$$

где A' – диагональная матрица.

Опр. Ортогональным преобразованием матрицы A наз. преобразование

$$T^{T}AT,$$

где T – ортогональная матрица. (т.е. $T^{-1} = T^{T}$)

Теорема Любую симметричную матрицу можно диагонализовать ортогональным преобразованием.

№4.174.

Выяснить, можно ли матрицу оператора диагонализовать переходом к новому базису. Найти этот базис и соотв. ему диагональную форму матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Решение. A – симметричная матрица $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно диагонализовать.

1 Найдём диаг. матр. A'.

Найдём собств. числа оператора из хар. ур-е:

$|A-\lambda E|=0.$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$(1-\lambda)^3+1+1-(1-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)=0$

$(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+2=0$

Пусть $1-\lambda=t$. Тогда

$t^3-3t+2=0$

$t=1$ корень (проверяется подстановкой в ур-е)

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3+0t^2-3t+2 & t-1 \\ \underline{t^3-t^2\qquad\quad} & t^2+t-2 \\ -\,t^2-3t \quad & \\ \underline{t^2-t\quad} & \\ -\,-2t+2 & \\ \underline{-2t+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow t^3-3t+2=(t-1)(t^2+t-2)$

$\Downarrow$

ур-е $t^3-3t+2=0$ имеет корни

$\underbrace{t=1 \quad t=1}_{\Downarrow \; \lambda=0 \text{ кратности } 2} \qquad t=-2 \Rightarrow \lambda=3$

След., $A'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. Это диагональная матрица (по диагонали стоят $\lambda=0, \lambda=0, \lambda=3$)

② Найдём базис из собств. векторов, соответствующих соб. числам оператора, из ур-я $(A-\lambda E)X=\theta$

1) Для $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix}1-0\cdot1&1&1\\1&1-0\cdot1&1\\1&1&1-0\cdot1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Это система однородных ур-ий.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе ур-ий:

$x_1+x_2+x_3=0$

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1=-c_1-c_2\\x_2=c_1\\x_3=c_2\end{cases}$$

где $c_1,c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{e}_1{}'}c_1+\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{e}_2{}'}c_2$$

2) Для $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3\cdot 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3\cdot 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3\cdot 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = C \\ x_3 = C \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3\,'} C, \; C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

След., базис из собств. векторов, в котором матрица оператора имеет диаг. вид:

$$\vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в базисе $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Обсуждение. Мы получили

$$\underset{\text{диаг.}}{A'}=(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1}\underset{\text{симм.}}{A}\,T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'},$$

где $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ \;\vec{e}_1{}' \;\; \vec{e}_2{}' \;\; \vec{e}_3{}'\end{array}$ невырожд. матрица (матр. перехода всегда невырожд.)

Но $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ не яв. ортогональной,

т.к. $(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^T\cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\neq E$.

Если ортонормировать базис $\mathcal{E}'(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$, то получим нов. базис $\mathcal{E}''(\vec{e}_1{}'',\vec{e}_2{}'',\vec{e}_3{}'')$, а матр. перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}$ уже будет ортогональной $((T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''})^T T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}=E)$.

Тогда из $A'=(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''})^{-1}A\,T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}$

получим $A'=(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''})^{T}A\,T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}''}$.

Это зн., что ту же диаг. матрицу A' можно получить из симм. матрицы A ортогональным преобразованием.

Как ортонормировать $\mathcal{E}'$:

из $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$ получить $\vec{e}_1{}'',\vec{e}_2{}''$ с помощью алгоритма Грама-Шмидта,

а $\vec{e}_3{}''=\dfrac{\vec{e}_3{}'}{\|\vec{e}_3{}'\|}$.

№ 4.183

Найти ортонормир. базис из собств. векторов ⑥ и матрицу в этом базисе для лин. оператора, заданного в некотором ортонормир. базисе матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. A – симметр. матрица ⇒ ⇒ можно диагонализовать.

① Найдём диаг. матр. A'.
Найдём собств. числа оператора из хар. ур-я

$|A - \lambda E| = 0.$

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(11-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)}_{110-22\lambda-65\lambda+13\lambda^2+5\lambda^2-\lambda^3} - 160 - 160 - 64(2-\lambda) - 100(11-\lambda) - 4(5-\lambda) = 0$$

Получим после упрощения

$-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = 0 \quad | \cdot (-1)$

Разложим на множ.: $\lambda^2(\lambda-18) - 81(\lambda-18) = 0$

$(\lambda-9)(\lambda+9)(\lambda-18) = 0$

$\lambda_1 = 9 \quad \lambda_2 = -9 \quad \lambda_3 = 18$

Соб. числа различны ⇒ ⇒ соотв. им собств. векторы ортогональны.

След., $A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

② Найдём базис из собств. векторов из ур-я

$(A - \lambda E)X = \Theta.$

1) Для $\lambda = 9$

$$\begin{pmatrix} 11-9 & 2 & -8 \\ 2 & 2-9 & 10 \\ -8 & 10 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \cdot 4 \quad \cdot(-1) \quad 1:2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \cdot 2 \quad 1:-9 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе ур-ий

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Нормируем $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$: Для этого разделим его на его длину $\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

Получим $\vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

2) Для $\lambda = -9$ аналогично получим

$$\begin{pmatrix} 11+9 & 2 & -8 \\ 2 & 2+9 & 10 \\ -8 & 10 & 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1:2 \\ \\ 1:2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ -4 & 5 & 7 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot 2 \quad \cdot(-5)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 27 & 27 \\ 0 & -54 & -54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-11) \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} d,\ d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$; его длина равна $\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$

Получим $\vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3) Для $\lambda = 18$ аналогично получим

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -7 & 2 & -8 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot 8 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & -54 & 27 \\ 0 & -54 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot 4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} d,\ d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Получим $\vec{e}_3\,' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
$$\parallel \qquad\quad \parallel \qquad\quad \parallel$$

Ответ: в ортонормир. базисе $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$ матрица оператора имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

<u>Обсуждение</u> Т.к. $T_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ ортогон. матрица, то мы получили диаг. матрицу A' из симм. матрицы A ортогон. преобр-ем:

$$A' = (T_{\varepsilon \to \varepsilon'})^T A\, T_{\varepsilon \to \varepsilon'}.$$

№4.186.

Задание то же.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

Решение. A – симметр. матр ⇒ можно диагонализовать

Найдём собств. числа оператора.

1) $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&2\\1&1-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$-\lambda^2(\lambda-6)=0$

$\lambda=0$ кратности 2 $\qquad \lambda=6$

След., $A'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

2) Найдём соб. векторы оператора

1) Для $\lambda=0$

$(A-\lambda E)X=\Theta$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}$$

$x_1+x_2+2x_3=0$

$$\begin{cases}x_1=-x_2-2x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}c_2$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно (т.е. $c_1^2+c_2^2\neq0$)

Векторы $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ явл. базисом собств. подпр-ва, соответствующего собств. числу $\lambda=0$. Но они не ортогональны, т.к. $(\vec{a_1},\vec{a_2})=2\neq0$.

Ортогонализуем, а затем нормируем их.

$$\vec{b_1}=\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{(\vec{a_2},\vec{a_1})}{|\vec{a_1}|^2}\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{т.к. } \left.\begin{matrix}|\vec{a_1}|^2=2\\(\vec{a_2},\vec{a_1})=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{(\vec{a_2},\vec{a_1})}{|\vec{a_1}|^2}=1$$

$$|\vec{a_1}|=\sqrt{2}\Rightarrow\vec{e_1}'=\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a_1}|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a_2}|=\sqrt{3}\Rightarrow\vec{e_2}'=\frac{\vec{a_2}}{|\vec{a_2}|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

2) Для $\lambda=6$

$$\begin{pmatrix}1-6&1&2\\1&1-6&2\\2&2&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1&2\\1&-5&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-5&2\\-5&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1)\ \cdot5\\ \\ \\\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-6&3\\0&6&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(-1)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3\\x_3=x_3\end{cases}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}d,\ d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\vec{a_3};\quad|\vec{a_3}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$$

Нормируем $\vec{a_3}$, получим $\vec{e_3}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

Ответ: в ортонормир. базисе $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \vec{e}_3{}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ оператор имеет диаг. матрицу $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Д/З I. № 4.175, 4.176.

II № 4.184; 4.190 Указание. Матрица U составлена из собств. векторов ортонормир. базиса.

Обсуждение.

Т.к. $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ - ортогон. матрица,

то мы получили диаг. матрицу A' из симметр. матрицы A ортогональным преобразованием:

$$A' = \underbrace{\left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^T}_{\left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1}} \cdot A \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$