Семинар 7 по ЛА

Квадратичные формы. Преобразование матрицы квадр. формы при переходе к новому базису.

Из теории: 1) в базисе $\mathcal{E}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ дана квадр. форма $Q(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n} a_{ij}x_i x_j$; её матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

всегда явл. симметричной.

Та же квадр. форма в другом базисе $\mathcal{E}'=(\vec{e}_1{}',\dots,\vec{e}_n{}')$ имеет вид $Q(y_1,\dots,y_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} a'_{ii}y_i^2+2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n} a'_{ij}y_i y_j$ и матрицу

$$A'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n}\\ a'_{12} & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn}\end{pmatrix}$$, тоже симметричную.

Пусть $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матр. перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$. Тогда

$$\boxed{A'=T^TAT}$$

(мы кратко обозначили $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ через T)

2) $\forall$ вектора $\vec{x}$ значение $Q(\vec{x})$ не зависит от базиса, в котором выписаны коорд-ты $\vec{x}$, т.е. $Q(\vec{x})=Q(x_1,\dots,x_n)=Q(y_1,\dots,y_n)$, если $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ в базисе $\mathcal{E}$, $\vec{x}=(y_1,\dots,y_n)$ в базисе $\mathcal{E}'$.

№1.

В базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q запис. как $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадр. формы в базисе $\vec{e_1}' = \vec{e_2}$, $\vec{e_2}' = \vec{e_1} - \vec{e_2}$.

Решение.

1) Матрица квадр. формы Q в базисе $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

половина коэф-та при "x_1, x_2"

2) Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

коэф-ты $\vec{e_1}'$ $\vec{e_2}'$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$

$$\Rightarrow \quad T^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(транспонированная)

3) Матрица квадр. формы Q в базисе $\mathcal{E}' = (\vec{e_1}', \vec{e_2}')$.

$$A' = T^T A T$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4) квадр. форма Q в базисе $\mathcal{E}'$:

$$Q(y_1, y_2) = -2y_1^2 + 2 \cdot 3 y_1 y_2 - 3y_2^2 =$$

$$= -2y_1^2 + 6y_1y_2 - 3y_2^2$$

Проверка. $X = TX' \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

ДЗ I. Аналог задачи для ① $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ и $\vec{e}_1{}' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = 5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$
② $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ и $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Подставим в форму:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 =$$
$$= y_2^2 - 2(y_1 - y_2)^2 + 2 \cdot y_2 \cdot (y_1 - y_2) =$$
$$= \underline{y_2^2} - 2y_1^2 + \underline{4y_1y_2} \underline{-2y_2^2} + \underline{2y_1y_2} - \underline{2y_2^2} =$$
$$= -2y_1^2 + 6y_1y_2 - 3y_2^2$$

(Это другой способ решения задачи, но формулу $A' = T^T A T$ надо знать)

Критерий Сильвестра

Из теории: квадр. форма наз.

положительно | отрицательно
определённой,
если $\forall \vec{x} \in L$, $\vec{x} \neq \vec{0}$

$Q(\vec{x}) > 0$ | $Q(\vec{x}) < 0$;

неопределённой (знакопеременной),
если $\exists \vec{x}$ и $\vec{y}$: $Q(\vec{x}) > 0$, $Q(\vec{y}) < 0$.

С помощью критерия Сильвестра можно определить тип формы

<u>Главными угловыми минорами</u> матрицы A наз. миноры:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Критерий Сильвестра и его следствие</u> (для невырожд. квадр. форм)

Квадр. форма от n переменных положит. определена $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

<u>Следствие.</u> Кв. форма от n переменных

1) отрицат. определена $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 < 0,$
$\Delta_2 > 0,$
$\Delta_3 < 0,$
$\Delta_4 > 0,$
$\vdots$
$(-1)^n \Delta_n > 0$

(т.е. знаки чередуются, начиная с минуса)

2) невырожденная знакопеременная (невырожденная неопределенная) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ выполняется <u>хотя бы одно из условий</u>:

а) один из гл. миноров равен нулю,

б) один из гл. миноров чётного порядка меньше нуля,

в) два гл. минора нечёт. порядка имеют разные знаки.

№2.

С помощью критерия Сильвестра определить, явл. ли квадр. форма

$$x_1^2 + 6x_1x_4 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_4^2$$

положит. определённой, отрицат. определённой или невырожденной неопределенной.

Решение.

1) Матрица квадр. формы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Зам. Если квадр. форма вырожденная ($\Delta_n=0$), то пользоваться следствием 2) из критерия Сильвестра нельзя. Можно сказать, что форма не явл. положит. и отрицат. определённая.

2) Главные миноры: $\Delta_1=1>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4=4>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3>0$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}= \text{разложим по посл. строке}$$

$$=(-3)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-3)\cdot 9+2\cdot 3<0 \ (\neq 0 \Rightarrow \text{невырожд.})$$

Т.к. один из гл. миноров чёт. порядка $\Delta_4<0$, то квадр. форма неопределённая.

Ответ: неопределённая.

ДЗ II. С помощью критерия Сильвестра и его следствий проверить квадр. форму $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=-2x_1^2+2x_1x_4-3x_2^2+2x_2x_3-3x_3^2-2x_4^2$ на знакоопределённость.

№4.218

Задание то же. $Q(x_1,x_2)=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$.

Решение. 1) Матрица квадр. формы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$$

2) Главные миноры: $\Delta_1 = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 26 - 25 = 1 > 0$$

След., квадр. форма положительно определённая

$\boxed{\text{Д/З III} \quad \text{№ } 4.219 - 4.223.}$

Канонический вид квадратичной формы

Метод Лагранжа приведения квадр. формы к канонич. виду.

Из теории: Квадр. формой канонич. вида наз. квадр. форма $\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, не имеющая попарных произведений переменных.

Метод Лагранжа заключается в последовательном выделении полных квадратов.

№3.

① Привести квадр. форму $Q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + x_2^2 + 2x_2 x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа

② Определить, явл. ли эта форма положит. определённой, отрицат. определённой или неопределённой.

Сканировано с CamScanner

Решение.

① Нет x_1^2, но есть x_2^2 („мысли вслух")

1) Выпишем <u>все</u> слагаемые, содержащие x_2:

$x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 =$ дополним до полного квадрата, использ. ф-лу $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$= x_2^2 - \overbrace{2\cdot 2x_1x_2}^{2\cdot x_2\cdot(2x_1)} + 2x_2x_3 + (2x_1)^2 - (2x_1)^2 + x_3^2 - x_3^2 -$
$- 2\cdot(2x_1)x_3 + 2(2x_1)x_3 =$

$=(x_2 - 2x_1 + x_3)^2 - (2x_1)^2 - x_3^2 + 2\cdot(2x_1)x_3 =$

$=(-2x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_3$

2) Подставим в квадр. форму $Q(x_1,x_2,x_3)$:

$Q(x_1,x_2,x_3) = (-2x_1+x_2+x_3)^2 - 4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_3 =$
$= (-2x_1+x_2+x_3)^2 \underbrace{-4x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_3}_{\text{это квадр. форма } Q_1(x_1,x_3)}$

3) Рас. $Q_1(x_1,x_3)$. В ней есть квадраты и x_1, и x_3. Выпишем все слаг., содержащие x_1:

$-4x_1^2 + 8x_1x_3 = -4(x_1^2 - 2x_1x_3) =$ дополним до полного квадрата
$= -4(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3^2) =$
$= -4((x_1 - x_3)^2 - x_3^2) =$
$= -4(x_1 - x_3)^2 + 4x_3^2.$

4) Подставим в $Q_1(x_1, x_3)$:

$$Q_1(x_1, x_3) = -4(x_1 - x_3)^2 + 4x_3^2 - x_3^2 = $$
$$= -4(x_1 - x_3)^2 + 3x_3^2$$

5) Подставим 4) в 2):

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{-2x_1 + x_2 + x_3}_{y_1})^2 - 4(\underbrace{x_1 - x_3}_{y_2})^2 + 3\underbrace{x_3}_{y_3}^2$$

Замена переменных:

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

В новых переменных квадр. форма будет иметь канонич. вид:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 4y_2^2 + 3y_3^2$$

Зам. Канонич. вид квадр. формы определён неоднозначно! При разных способах выделения полных квадратов получ. разные ответы, и все они верные.

(2) Исследовать квадр. форму на положит. и отрицат. определённость, и неопределённость можно по матрице A, и по матрице A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$ ← два минора нечёт. порядка разных знаков.

$\Delta_2 = -4 < 0$ (минор чёт. порядка < 0)

$\Delta_3 = -12 < 0$ ($\neq 0 \Rightarrow$ невырожд.)

След., квадр. форма неопределённая.

Ответ: $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 4y_2^2 + 3y_3^2$;
неопределённая.

№4.210.

① Методом Лагранжа найти нормальный (т.е. канонический) вид и ② невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для квадр. формы
$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

Решение.

① 1) Выпишем все слагаемые, содержащие x_1:

$x_1^2 + 2x_1x_2 - \overbrace{4x_1x_3}^{2\cdot x_1\cdot 2x_3} =$ дополним до полного квадрата

$= \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} - x_2^2 \underbrace{- 2\cdot x_1\cdot 2x_3 + (2x_3)^2} - (2x_3)^2 -$
$\underbrace{- 2\cdot x_2\cdot(2x_3)} + 2\cdot x_2\cdot(2x_3) =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - (2x_3)^2 + 2\cdot x_2\cdot(2x_3)$.

2) Подставим в квадр. форму $Q(x_1, x_2, x_3)$:

$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - (2x_3)^2 + 2\cdot x_2(2x_3) +$
$+ 5x_2^2 - 4x_3^2 =$

$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \underbrace{+ 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3}_{Q_1(x_2, x_3)}$

3) Рас. $Q_1(x_2, x_3) = 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3$.

Выпишем все слаг., содержащие x_2:

$$4x_2^2 + 4x_2x_3 = (2x_2)^2 + 2\cdot(2x_2)\cdot x_3 + x_3^2 - x_3^2 =$$

↑ дополним до полного квадрата

$$= (2x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

4) Подставим в $Q_1(x_2, x_3)$:

$$Q_1(x_2, x_3) = (2x_2 + x_3)^2 - x_3^2 - 8x_3^2 = (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2 =$$
$$= (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2$$

5) Подставим 4) в 2):

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{y_1})^2 + (\underbrace{2x_2 + x_3}_{y_2})^2 - (\underbrace{3x_3}_{y_3})^2$$

Замена переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 & (1) \\ y_2 = 2x_2 + x_3 & (2) \\ y_3 = 3x_3 & (3) \end{cases}$$

В новых переменных квадр. форма будет иметь канонич. вид:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

② Требуется выразить старые переменные через новые, т.е. x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3.

$(3) \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} y_3$

Подставим в (2): $y_2 = 2x_2 + \frac{1}{3} y_3$

$$2x_2 = y_2 - \frac{1}{3} y_3$$

$$x_2 = \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{6} y_3$$

Подставим в (1):

$$y_1 = x_1 + \left(\frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{6} y_3\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} y_3$$

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{5}{6} y_3$$

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{5}{6} y_3$$

Мы получим

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{5}{6} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{6} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3} y_3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ответ: } y_1^2 + y_2^2 - y_3^2; \text{ преобр-е.}}$

Это искомое линейное преобразование, невырожденное (т.к. $\det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \neq 0$).

__Зам.__ Можно найти искомое преобразование (4) по-другому:

из 5) $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{T_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Надо найти $T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$. $\quad T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \left(T_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}}\right)^{-1}$.

Получим $T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, а потом запишем преобразование (4).

№4.211.

Задание то же.

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_3 x_1$.

Решение ① В квадратичной форме нет квадратов. Создадим их.

1-я замена переменных: $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ (5)

Подставим в кв. форму:

$Q(x_1, x_2, x_3) = (y_1+y_2)(y_1-y_2) + (y_1-y_2)y_3 - y_3(y_1+y_2) =$

$= y_1^2 - y_2^2 + \cancel{y_1 y_3} - y_2 y_3 - \cancel{y_3 y_1} - y_3 y_2 =$

$= y_1^2 - y_2^2 - 2y_2 y_3 = Q(y_1, y_2, y_3)$

1) Выпишем слагаемые, сод. y_2:

$-y_2^2 - 2y_2 y_3 = -(y_2^2 + 2y_2 y_3) = -(y_2^2 + 2y_2 y_3 + y_3^2 - y_3^2) =$

дополним до полного квадрата

$= -(y_2 + y_3)^2 + y_3^2$

2) Подст. в квадр. форму $Q(y_1, y_2, y_3)$:

$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - (\underbrace{y_2 + y_3}_{z_2})^2 + y_3^2$

2-я замена переменных: $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ (6)

В новых переменных кв. форма будет иметь канонич. вид:

$$Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

② Выразим x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3

$$(6) \Rightarrow \begin{cases} y_3 = z_3 \\ y_2 = z_2 - y_3 = z_2 - z_3 \\ y_1 = z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

Подст. в (5):

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + (z_2 - z_3) \\ x_2 = z_1 - (z_2 - z_3) \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 + z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Ответ: $z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$; искомое преобр-е см.

ДЗ IV. № 4.212

ДЗ V. Привести квадр. форму $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$ к канонич. виду методом Лагранжа. Указать соответств. преобразование и тип квадр. формы (положит. опред., отрицат. опред., неопределённая)