Семинар 8 по ЛА, часть 1

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

№ 4.213.

Найти ортогональное преобразование, приводящее форму к каноническому виду и написать этот канонич. вид:

$$11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3=Q(x_1,x_2,x_3)$$

Решение.

① Канонич. вид квадр. формы.

1) Собств. значения матрицы квадр. формы.

$$A=\begin{pmatrix}11 & 8 & 2\\ 8 & 5 & -10\\ 2 & -10 & 2\end{pmatrix}$$ – матрица квадр. формы.

Решим хар. ур-е: $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}11-\lambda & 8 & 2\\ 8 & 5-\lambda & -10\\ 2 & -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458=0$$

$$(\lambda-9)(\lambda+9)(\lambda-18)=0$$

$$\lambda_1=9,\ \lambda_2=-9,\ \lambda_3=18$$

$\Rightarrow$ $$A'=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix}$$ – матр. квадр. ф-ы в новых переменных

2) Канонич. вид квадр. формы в новых переменных: $Q(y_1,y_2,y_3)=9y_1^2-9y_2^2+18y_3^2$

② Найдём ортогональное преобразование, приводящее форму к канонич. виду.

1) Найдём базис из собств векторов матрицы квадр. формы

Собств. векторы, соотв. собств значениям λ_i найдём из системы ур-ий $AX=\lambda_i X$, эквивалентно системе однор. ур-ий $(A-\lambda_i E)X=\Theta$.

<u>Для $\lambda_1 = 9$</u>

$$A-9E = \begin{pmatrix} 11-9 & 8 & 2 \\ 8 & 5-9 & -10 \\ 2 & -10 & 2-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 8 & -4 & -10 \\ 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-4) \\ + \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -36 & -18 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & -36 & -18 \end{pmatrix} \cdot (-2) + \quad 1:(-18) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе ур-ий.

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = -\frac{1}{2}C \\ x_3 = C \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} C =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} d, \; d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$ Это мн-во всех собств векторов, соотв. собств значению $\lambda_1 = 9$.

Нормируем вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (его длина равна 3), получим $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

<u>Для $\lambda_2 = -9$</u>

$$A-(-9)E = \begin{pmatrix} 11+9 & 8 & 2 \\ 8 & 5+9 & -10 \\ 2 & -10 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 2 \\ 8 & 14 & -10 \\ 2 & -10 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1:2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 2 & -10 & 11 \\ 8 & 14 & -10 \end{pmatrix} (-4) \sim \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 2 & -10 & 11 \\ 0 & 54 & -54 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 1:54 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 10 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (-5) + \sim \begin{pmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 0 & 54 & -54 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 10 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1:2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}c \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases}, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

В вект. виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} d, \ d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Это мн-во всех собств. векторов, соотв. собств. значению $\lambda_2 = -9$.

Нормируем вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (его длина равна $\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3$), получим $\vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

<u>Для $\lambda_3 = 18$</u>

$$A - 18E = \begin{pmatrix} 11-18 & 8 & 2 \\ 8 & 5-18 & -10 \\ 2 & -10 & 2-18 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 8 & 2\\ 8 & -13 & -10\\ 2 & -10 & -16\end{pmatrix} |:2; \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -8\\ 8 & -13 & -10\\ -7 & 8 & 2\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot(-8) & \cdot 7\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -8\\ 0 & 27 & 54\\ 0 & -27 & -54\end{pmatrix} ; |:27 \sim \begin{pmatrix}1 & -5 & -8\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot 5 \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 = 0\\ x_2 + 2x_3 = 0\end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3\\ x_2 = -2x_3\\ x_3 = x_3\end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2c\\ x_2 = -2c\,, \; c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\\ x_3 = c\end{cases}$$

Это мн-во всех собств векторов для собств значения $\lambda_3 = 18$.

В векторном виде:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} c, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Нормируем вектор $\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$, получим $\vec{e}_3^{\,\prime} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Мы получили ортонорм. базис $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$!

2) Запишем матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, где $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – исходный ортонорм. базис, $\mathcal{E}' = (\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime})$ – ортонорм. базис из собств. векторов:

$$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix}\vec{e}_1^{\,\prime} & \vec{e}_2^{\,\prime} & \vec{e}_3^{\,\prime}\end{matrix}$$

Формулы преобразования координат (векторов):

$$X = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X', \text{ где } X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}.$$

Зам. Вместо $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ можно писать $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$.

Ответ: $9y_1^2 - 9y_2^2 + 18y_3^2$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Можно сделать проверку. $A' = T^T A T$, где $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$.

№4.215

Задание то же. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Решение.

1 Найдём канонич. вид квадр. формы.

1) Найдём собств. значения матрицы квадр. формы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица квадр. формы

Решим хар. ур-е $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)^3-12(1-\lambda)+16=0$

Пусть $1-\lambda=t$. Решим $t^3-12t+16=0$

$t_1=2$ корень $\Rightarrow$

$t^3-12t+16=(t-2)(t^2+2t-8)$,

т.к.

$$\begin{array}{l|l} t^3+0t^2-12t+16 & t-2 \\ \underline{t^3-2t^2} & t^2+2t-8 \\ \quad 2t^2-12t & \\ \quad \underline{2t^2-4t} & \\ \qquad -8t+16 & \\ \qquad \underline{-8t+16} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Решим $t^2+2t-8=0$

$t_2=2$, $t_3=-4$

След., $\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=2 \\ t=-4. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1-\lambda=2 \\ 1-\lambda=2 \\ 1-\lambda=-4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \\ \lambda=5 \end{array}\right.$

Мы получили $\lambda=-1$ кратности 2 (это алгебр. кратность)

$\lambda=5$ кратности 1

2) Канонич. вид квадр. формы:

$Q(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

2) Найдём ортогон. преобр-е, приводящее форму к канонич. виду.

1) Найдём базис из собств. векторов матрицы квадр. формы.

Собств. векторы найдём из $(A-\lambda E)X=\Theta$ (см. подробно пред. задачу)

<u>Для $\lambda_{1,2} = -1$</u>

$$A-(-1)E = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 & 2 \\ 2 & 1+1 & 2 \\ 2 & 2 & 1+1 \end{pmatrix} \sim (2\ \ 2\ \ 2) \sim (1\ \ 1\ \ 1)$$

Вернёмся к системе ур-ий:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2,$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и не равны одновременно нулю.

Это мн-во всех собств. векторов, соотв. собств значению $\lambda = -1$. <u>Зам.</u> Геом. кратность $\lambda=-1$ равна 2, т.е. алгебр. и геом. кратности совпадают.

Обозначим

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем $\vec{a_1}, \vec{a_2}$, а затем нормируем:

$$\vec{b_1} = \vec{a}_1$$

$$\vec{b_2} = \vec{a_2} - \frac{(\vec{a}_2, \vec{a}_1)}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{1+1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b_1}| = |\vec{a_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b_2}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1^{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

След, ортонормир. система собств. векторов для $\lambda = -1$ это, напр., $\vec{e}_1 = \frac{\vec{b_1}}{|\vec{b_1}|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \frac{\vec{b_2}}{|\vec{b_2}|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Для $\lambda_3 = 5$

$$A-5E = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 2 \\ 2 & 1-5 & 2 \\ 2 & 2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе ур-ий:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Нормируем собств. вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим

$$\vec{e_3}\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Мы получили ортонормир. базис из собств. векторов:

$$\vec{e_1}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2}\,' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3}\,' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

2) Запишем матрицу перехода $T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, где $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ - исходный ортонормир. базис, $\mathcal{E}' = (\vec{e_1}\,', \vec{e_2}\,', \vec{e_3}\,')$ - ортонормир. базис из собств. векторов:

$$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}$$

Формулы преобразования координат (векторов):

$$X = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} X' \quad \text{, где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt2} y_1 - \frac{1}{\sqrt6} y_2 + \frac{1}{\sqrt3} y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt2} y_1 - \frac{1}{\sqrt6} y_2 + \frac{1}{\sqrt3} y_3 \\ x_3 = \qquad \frac{2}{\sqrt3} y_2 + \frac{1}{\sqrt3} y_3 \end{cases}$$

Ответ: $-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$; орт. преобр-е: .

$\boxed{\text{ДЗ I. } N 4.214,\ 4.216}$

№ A.

Методом ортогональных преобразований привести квадр. форму
$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
к канонич. виду. Указать соответствующее преобразование координат.

<u>Зам.</u> Эта задача такая же как предыдущие, но используются другие обозначения: вместо x_1, x_2, x_3 — x, y, z
вместо y_1, y_2, y_3 — x', y', z'.

Решение

① Канонич. вид квадр. формы

1) Собств. значения матрицы квадр. формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ найдём из хар. ур-я: $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (3-\lambda)^3 - 3(3-\lambda) - 2 = 0$$

Пусть $t = 3-\lambda$.

Решим $t^3-3t-2=0$

$t_1=2$ корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^3-3t-2 = (t-2)(t^2+2t+1)$,

т.к.

$$\begin{array}{r|l} t^3+0t^2-3t-2 & t-2 \\ \hline -\;t^3-2t^2 \qquad\qquad & t^2+2t+1 \\ 2t^2-3t \qquad & \\ -\;2t^2-4t \qquad & \\ t-2 & \\ -\;t-2 & \\ 0 & \end{array}$$

Ур-е примет вид:

$(t-2)(t+1)^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_{2,3}=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3-\lambda=2 \\ 3-\lambda=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1=1 \\ \lambda_{2,3}=4 \text{ кратн. } 2 \end{array}\right.$$

След, матрица квадр. формы в новых переменных $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) Канонич. вид квадр. формы в новых переменных: $Q(x', y', z') = x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2$.

② Ортогональное преобр-е, приводящее квадр форму к канонич. виду.

1) Найдём ортонормир. базис из собств. векторов матрицы A из ур-я $(A-\lambda E)X=\Theta$.

Для $\lambda = 1$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot(-2)+ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) + \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к сист. ур-ий:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = c \\ y = c \\ z = c \end{cases}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

В векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$ Это мн-во всех собств. векторов для $\lambda = 1$.

Нормируем собств. вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Для $\lambda = 4$

$$A-4E=\begin{pmatrix}3-4 & -1 & -1\\ -1 & 3-4 & -1\\ -1 & -1 & 3-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе ур-ий:

$x+y+z=0$ $\quad\begin{cases}x=-y-z\\ y=y\\ z=z\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=-c_1-c_2\\ y=c_1\\ z=c_2\end{cases}$

В векторном виде:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}c_2$, где $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ и c_1 и c_2 одновременно $\neq 0$.

Это мн-во всех собств. векторов для $\lambda=4$.

Обозначим $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

ортогонализуем, а затем нормируем их:

$\vec{b_1}=\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\dfrac{(\vec{a_2},\vec{a_1})}{|\vec{a_1}|^2}\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{b_1}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b_2}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Ортонормир. система из собств. векторов:

$\vec{e_1}'=\dfrac{\vec{b_1}}{|\vec{b_1}|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}'=\dfrac{\vec{b_2}}{|\vec{b_2}|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

Мы получили ортонормир. базис из собств. векторов: $\vec{e_1}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

2) Запишем матрицу перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, где $\mathcal{E}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – исходный ортонормир. базис, $\mathcal{E}'=(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$ – базис из собств. векторов:

$$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \vec{e}_3{}'\end{array}\end{array}$$

Формулы пеобразования к-т (векторов):

$$X=T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}X', \text{ где } X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

Искомое ортогон. преобр-е:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt3}x'-\frac{1}{\sqrt2}y'-\frac{1}{\sqrt6}z'\\ y=\frac{1}{\sqrt3}x'+\frac{1}{\sqrt2}y'-\frac{1}{\sqrt6}z'\\ z=\frac{1}{\sqrt3}x'+\frac{2}{\sqrt6}z'\end{cases}$$

Ответ: $Q(x',y',z')=x'^2+4y'^2+4z'^2$. ортогон. преобр-е:

Зам. Зная $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, можно найти $\vec{e}_3{}'$ по-другому: $\vec{e}_3{}'=\underbrace{[\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}']}_{\text{вект. произведение}}$.

Напр., в последней задаче:

$$\vec{e}_3{}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \leftarrow\vec{e}_1{}'\\ \leftarrow\vec{e}_2{}'\end{array}=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt6}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt6}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt6}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_3{}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

ДЗ!! Аналог. задание для:
① $9x^2+24xy+16y^2=Q(x,y)$
② $3x^2-5z^2-4xy-6xz-12yz=Q(x,y,z)$

Дополнит. вопрос в задаче А: определить тип квадратичной формы (положит. определённая, отрицат. определённая или неопределённая).

I сп. Использовать критерий Сильвестра для канонич. вида квадр. формы.

II сп. Использовать <u>теорему о типе квадр. формы в завис. от соб. знач. её матрицы.</u>

тип формы	мн-во соб. знач.
Положит. определённая	Все соб. знач. $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots n$
Отрицат. определённая	Все соб. знач. $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$
Знакоперем.	$\exists \lambda_i > 0$ и $\exists \lambda_j < 0$
Вырожденная	$\exists \lambda_i = 0$.

№А (продолжение)

3) Определим тип формы.
$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Все $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ положит. опред.

Д/З III Для формы $Q(x,y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2$ определить её тип. Это форма из Д/З II, ①.