Семинар 8 по ЛА, часть 2

Приведение кривых 2 порядка к каноническому виду.

№ 4.226.

Написать каноническое ур-е кривой 2 порядка, определить её тип и найти каноническую систему координат.

$$9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0.$$

Решение.

$$\underbrace{9x^2-4xy+6y^2}_{\text{квадратичная форма}}+\underbrace{16x-8y}_{\text{линейная форма}}\underbrace{-2}_{\text{свободный член}}=0$$

(1) Приведём квадр. форму к канонич. виду и найдём ортогон. преобр-е, приводящее форму к такому виду.

1) Квадр. форма $Q(x,y)=9x^2-4xy+6y^2$.

$A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-15\lambda+50=0$$

$$\lambda_1=5 \qquad \lambda_2=10$$

Канонич. вид квадр. формы:

$Q(x',y')=5x'^2+10y'^2$.

в новых переменных x', y'.

г) Ортогон. преобр-е.

Найдём собств. векторы для матр. A.

Для $\lambda=5$

$$A-5E=\begin{pmatrix}9-5 & -2\\ -2 & 6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$x-\frac{1}{2}y=0$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y\\ y=y\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}c\\ y=c\end{cases}\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}d,\ d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Нормируем $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, получим $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\vec{e}_1{}'$.

Для $\lambda=10$

$$A-10E=\begin{pmatrix}9-10 & -2\\ -2 & 6-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

$x+2y=0$

$$\begin{cases}x=-2y\\ y=y\end{cases}\quad \begin{cases}x=-2c\\ y=c\end{cases}\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}c,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Нормируем $\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$, получим $\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\vec{e}_2{}'$.

Собств. векторы – $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$.

Матр. перехода $T_{\varepsilon\to\varepsilon'}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

Ортогон. преобр-е:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'\\ y=\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\end{cases}$$

② Запишем линейную форму в новых перем.

$$16x-8y=16\left(\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'\right)-8\left(\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right)=$$

$$=\cancel{\frac{16}{\sqrt5}x'}-\frac{32}{\sqrt5}y'-\cancel{\frac{16}{\sqrt5}x'}-\frac{8}{\sqrt5}y'=-\frac{40}{\sqrt5}y'=-8\sqrt5y'$$

Из ①,② запишем ур-е кривой в новых перем:

$$5x'^2+10y'^2-8\sqrt5y'-2=0$$

③ Выделим полный квадрат по y':

$$10y'^2-8\sqrt5y'=10\left(y'^2-\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt5}{\underset{5}{\cancel{10}}}y'\right)=10\left(y'^2-2\cdot\frac{2\sqrt5}{5}y'+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2\right)=10\left(y'-\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2-\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\frac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{25}}=$$

$$=10\left(y'-\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2-8.$$

Ур-е кривой будет:

$$5x'^2+10\left(y'-\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2-8-2=0$$

Сделаем ещё одну замену перем.:

$$\begin{cases}x''=x'\\ y''=y'-\frac{2\sqrt5}{5}\end{cases}$$

Ур-е кривой в перем x'',y'':

$$5x''^2+10y''^2-10=0$$

④ Преобразуем ур-е к каноническому виду: $5x''^2+10y''^2=10 \quad |:10$

$$\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{1}=1$$

Scanned by CamScanner

Сканировано с CamScanner

$$\boxed{\frac{x''^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y''^2}{1^2} = 1}$$

Это каноническое ур-е эллипса.

$$\left(\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ где } a = \sqrt{2}, b = 1 \right)$$

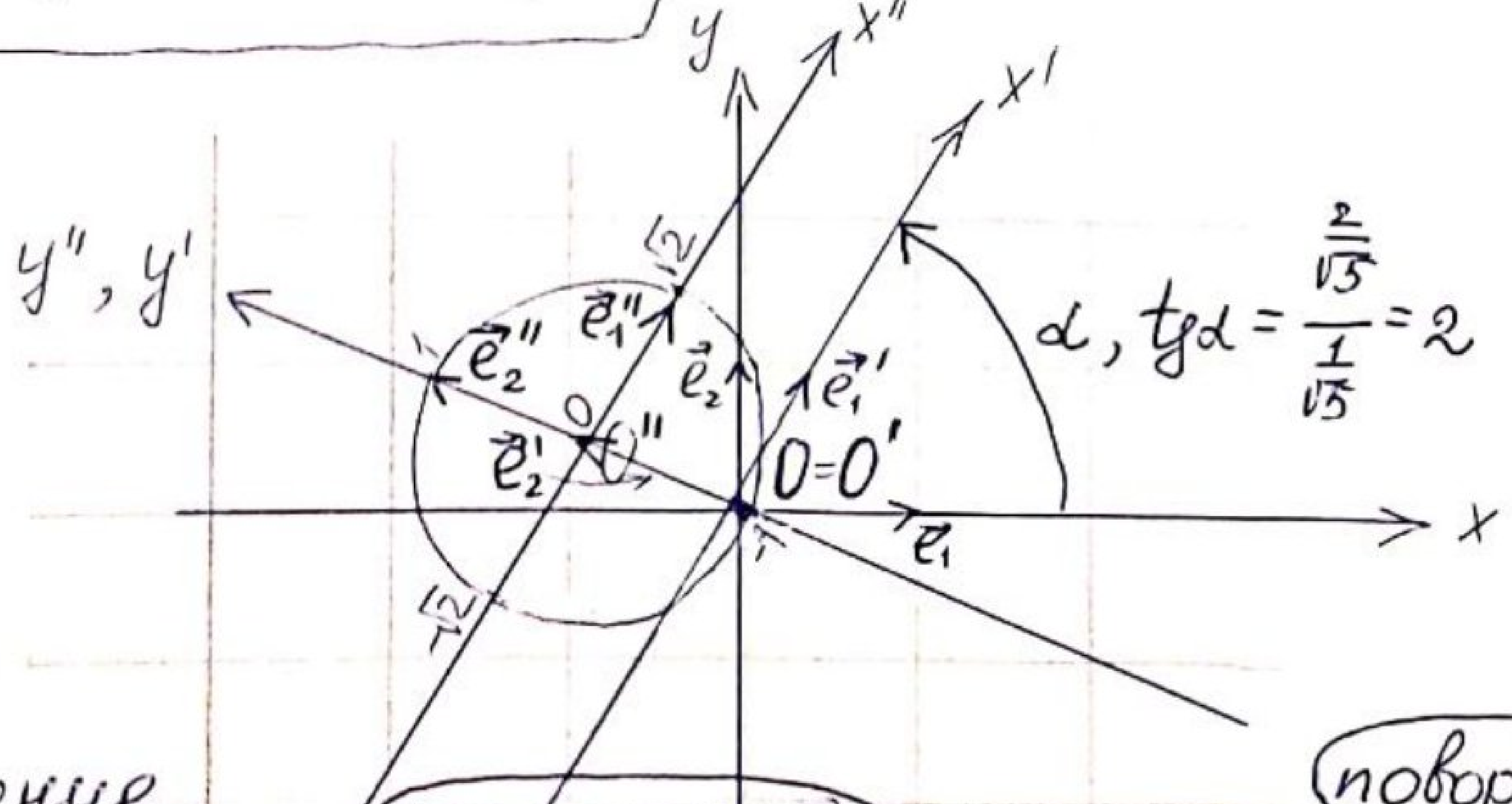
Преобразование исходных координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(y'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = \frac{2}{\sqrt{5}} x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(y'' + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' - \frac{2}{\sqrt{5}} y'' - \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x'' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \frac{2}{5} \end{cases} \quad \vec{e}_1'' = \vec{e}_1' \quad \vec{e}_2'' = \vec{e}_2' \quad O''}$$

Канонич. система координат $- O''\vec{e}_1''\vec{e}_2''$, где $\vec{e}_1'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2'' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $O'' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ относительно исходной сис. к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

(5) Построим кривую:



Пояснение.

Мы перешли от (прямоугольной) системы к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ сначала (поворотом) к прямоуг. сис. к-т $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$, а затем (переносом) к прямоуг. сис. к-т $O''\vec{e}_1''\vec{e}_2''$. В посл. сис. к-т ур-е эллипса имеет канонич. вид.

№4.228.

Задание такое же: $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

Решение. $\underbrace{5x^2+12xy}_{\text{квадр. форма}}\underbrace{-22x-12y}_{\text{линейная форма}}-19=0$

① Приведем квадр. форму к канонич виду и найдём ортогональное преобр-е, приводящее форму к такому виду.

1) Квадр. форма $Q(x,y)=5x^2+12xy$.

$A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$; $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 6\\ 6 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-5\lambda-36=0$$

$$\lambda_1=9 \qquad \lambda_2=-4$$

Канонич вид квадр. формы:

$Q(x',y')=9x'^2-4y'^2$ в переменных x',y'.

2) Ортогональное преобразование.

Найдём собств векторы для матр. A

$\underline{\text{Для } \lambda=9}$

$A-9E=\begin{pmatrix}5-9 & 6\\ 6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\sim(2\ \ -3)\sim$

$\sim\left(1\ \ -\frac{3}{2}\right)$

$x-\frac{3}{2}y=0$

$\begin{cases}x=\frac{3}{2}y\\ y=y\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{3}{2}c\\ y=c\end{cases}$ $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}d$, $d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Нормируем $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, получим $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$.

Для $\lambda = -4$

$$A+4E = \begin{pmatrix}5+4 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \sim (3\ 2) \sim (1\ \tfrac{2}{3})$$

$x + \frac{2}{3}y = 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3}c \\ y = c \end{cases} \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}d,\ d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Нормируем $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, получим $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$

Собств. векторы – $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$

Матр. перехода $T_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$

Ортогон. преобр-е

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' \end{cases}$$

② Запишем линейную форму в новых перем.:

$$-22x - 12y = -22\left(\frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'\right) - 12\left(\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'\right) =$$

$$= -\frac{90}{\sqrt{13}}x' + \frac{8}{\sqrt{13}}y'$$

Из ①, ② запишем ур-е кривой в новых перем.:

$$9x'^2 - 4y'^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' + \frac{8}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$$

③ Выделим полные квадраты по x' и по y':

$$9\left(x'^2-\frac{10}{\sqrt{13}}x'\right)-4\left(y'^2-\frac{2}{\sqrt{13}}y'\right)-19=0$$

$$9\left(x'^2-2\cdot\frac{5}{\sqrt{13}}\cdot x'+\left(\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2\right)-$$

$$-4\left(y'^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot y'+\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2\right)-19=0$$

$$9\left(x'-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-\frac{9\cdot 25}{13}-4\left(y'-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2+\frac{4}{13}-19=0$$

$$9\left(x'-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-4\left(y'-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)-36=0$$

Замена перем.:

$$\begin{cases} x''=x'-\frac{5}{\sqrt{13}} \\ y''=y'-\frac{1}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Ур-е кривой в переменных x'', y'':

$$9x''^2-4y''^2-36=0$$

④ Преобразуем ур-е к канонич. виду.

$$\boxed{\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1}$$

Это канонич. ур-е гиперболы

$$\left(\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1\right., \text{ где } a=2,\ b=3\left.\right)$$

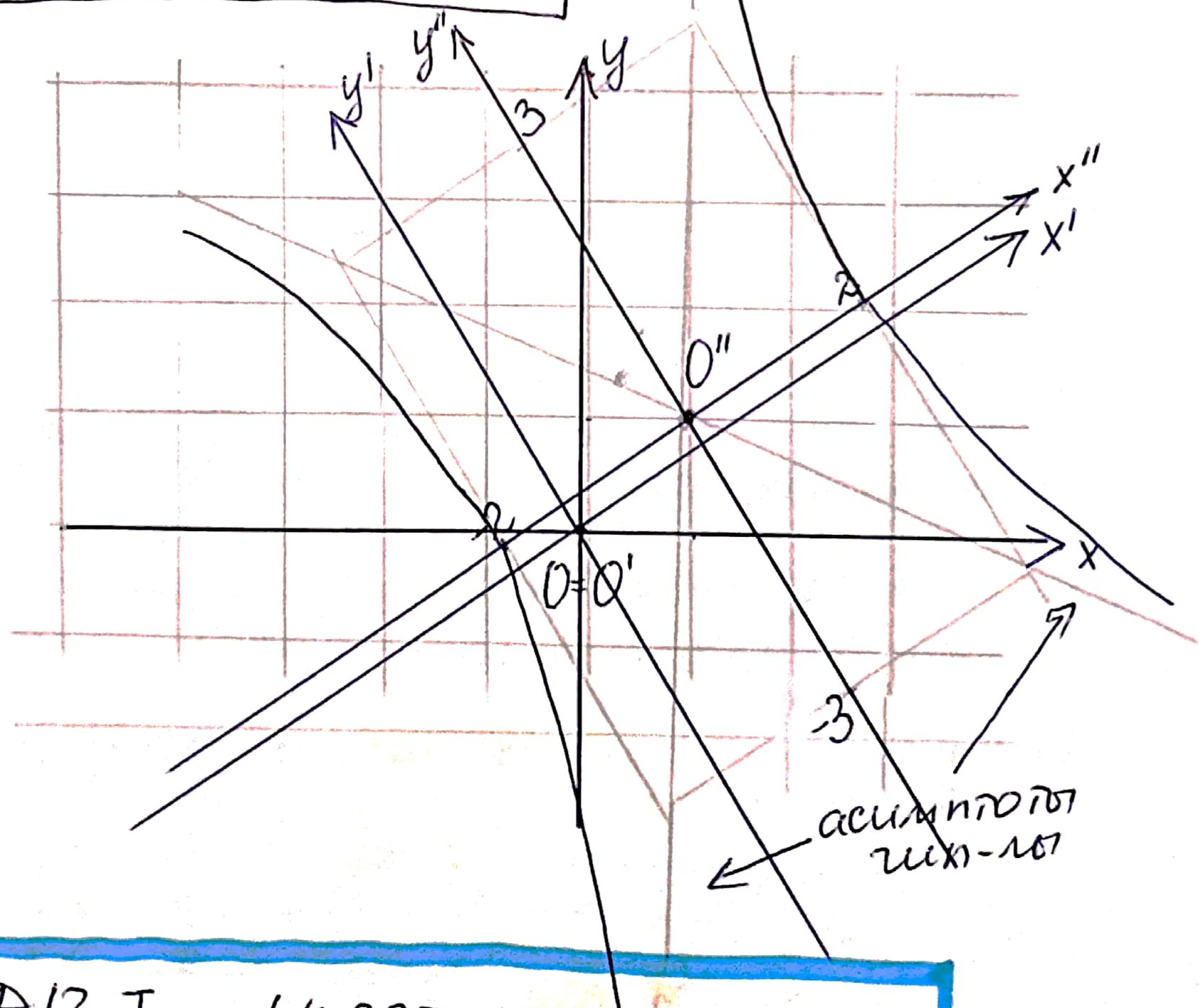
Преобразование исходных координат:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y' = \frac{3}{\sqrt{13}}\left(x'' + \frac{5}{\sqrt{13}}\right) - \frac{2}{\sqrt{13}}\left(y'' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right) \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' = \frac{2}{\sqrt{13}}\left(x'' + \frac{5}{\sqrt{13}}\right) + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(y'' + \frac{1}{\sqrt{13}}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x'' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'' + 1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}x'' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'' + 1 \end{cases} \\ \vec{e}_1'' = \vec{e}_1' \quad \vec{e}_2'' = \vec{e}_2' \quad O'' \end{array}}$$

Канонич. система к-т $- O''\vec{e}_1''\vec{e}_2''$, где $\vec{e}_1'' = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2'' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$, $O'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ относит. исходной системы к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

⑤ $\boxed{\text{Построим кривую:}}$



$\boxed{\text{ДЗ I. № 4.227, 4.229, 4.230.}}$

№4.231.

Задание то же: $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$

Решение.

<u>Обсуждение</u>. Хотелось бы сделать так:

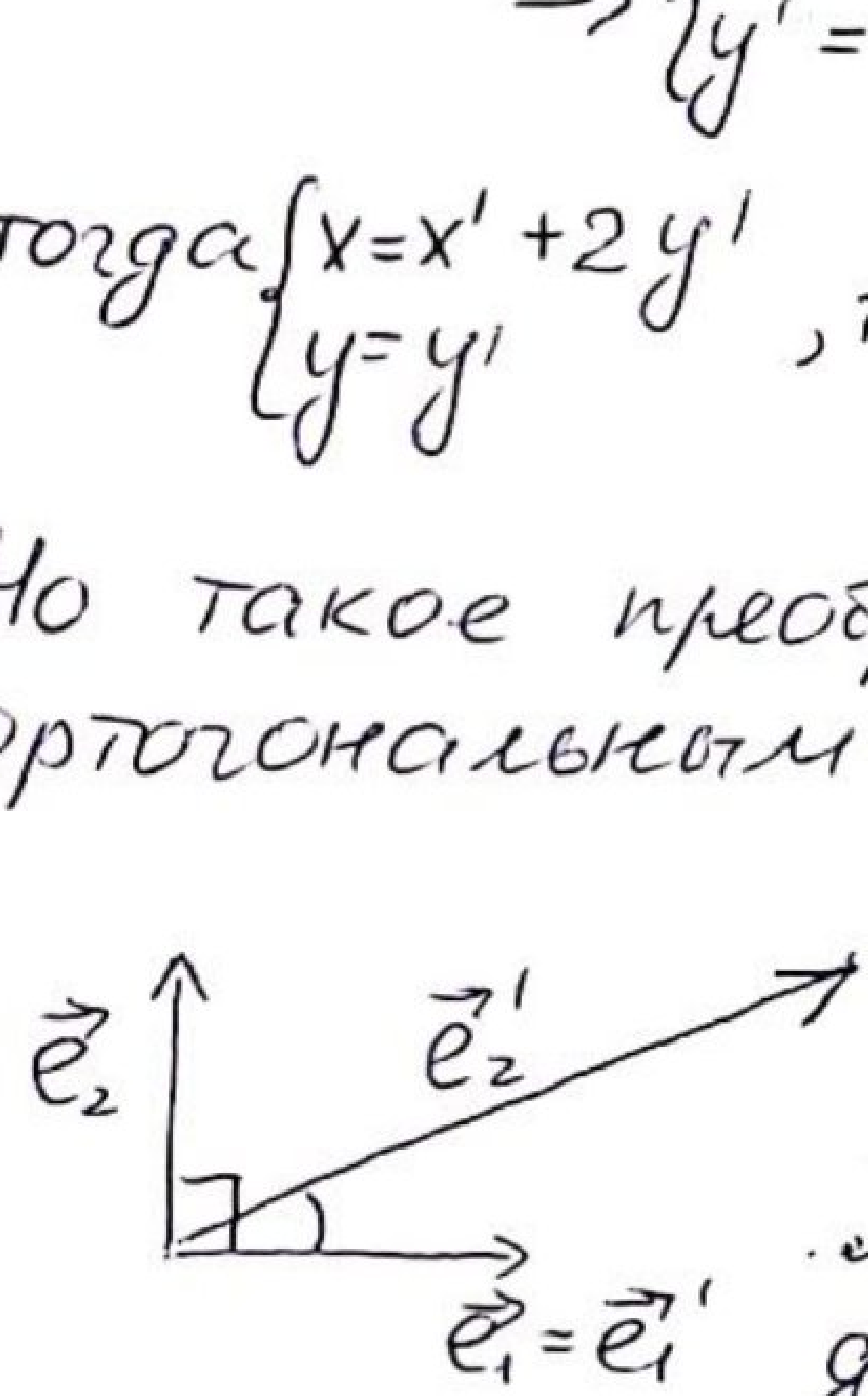
$$\underbrace{(x-2y)}_{x'}{}^2-4x-3y-7=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=x-2y \\ y'=y \text{ (например)} \end{cases}, \quad (*)$$

тогда $\begin{cases} x=x'+2y' \\ y=y' \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x=1\cdot x'+2y' \\ y=0\cdot x'+1y' \end{cases}$

$\vec{e}_1{}' \quad \vec{e}_2{}'$

Но такое преобразование не явл. ортогональным (в частн., потому что его матрица $T_{E\to E'}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$



не ортогональна): меняются углы и длины векторов.

Преобразование (*) можно улучшить (например, так):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y' \\ y=\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y' \end{cases}$$, теперь оно ортогональное.

Не будем обсуждать новый алгоритм, а вернёмся к старому алгоритму.

① Приведём квадр. форму $Q(x,y)=x^2-4xy+4y^2$ к канонич. виду ортогональным преобразованием.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$; $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-5\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-5)=0$$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=5$$

$Q(x',y')=5y'^2$ – канонич. вид квадр. формы.

2) Ортогон. преобр-е.

<u>Для $\lambda=0$</u>

$A-0E=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$ $\quad x-2y=0$ $\quad \begin{cases}x=2y\\ y=y\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}c,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

След., $\vec{e}_1{}'=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

<u>Для $\lambda=5$</u>

$A-5E=\begin{pmatrix}1-5 & -2\\ -2 & 4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad 2x+y=0$ $\quad \begin{cases}x=x\\ y=-2x\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}c,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

След., $\vec{e}_2{}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

Матр. перехода $T_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Ортогон. преобр-е: $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

② Линейная форма в новых перем.:

$$-4x - 3y = -4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) =$$

$$= -\frac{11}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

Подст. в ур-е кривой:

$$5y'^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0$$

③ Выделим полный квадрат по y'.

$$5y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = 5\left(y'^2 + \frac{2}{5\sqrt{5}}y'\right) =$$

$$= 5\left(y'^2 + 2\cdot\frac{1}{5\sqrt{5}}\cdot y' + \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2\right) =$$

$$= 5\left(y' + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\cancel{5}}{25\cdot\cancel{5}} = 5\left(y' + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{25}$$

Подст. в ур-е кривой:

$$5\left(y' + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}x' \underbrace{- \frac{1}{25} - 7^{\llcorner 25}}_{-\frac{176}{25}} = 0$$

Преобразуем:

$$5\left(y' + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}\left(x' + \frac{\overset{16}{\cancel{176}}\cdot\sqrt{5}}{25\cdot\cancel{11}}\right) = 0$$

$$5\left(y' + \frac{\sqrt{5}}{25}\right)^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}\left(x' + \frac{16\sqrt{5}}{25}\right) = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{16\sqrt{5}}{25} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{25} \end{cases}$$

Ур-е кривой:

$$5y''^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}x'' = 0$$

$$y''^2 = \frac{11}{5\sqrt{5}}x''$$

$$\boxed{y''^2 = 2\cdot\frac{11}{10\sqrt{5}}x''}$$

Это канонич. ур-е параболы

$(y''^2 = 2px''$, где $p = \frac{11}{10\sqrt{5}}$

Преобр-е исходных к-т:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x'' - \frac{16\sqrt{5}}{25}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(y'' - \frac{\sqrt{5}}{25}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x'' - \frac{16\sqrt{5}}{25}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(y'' - \frac{\sqrt{5}}{25}\right) \end{cases}$$

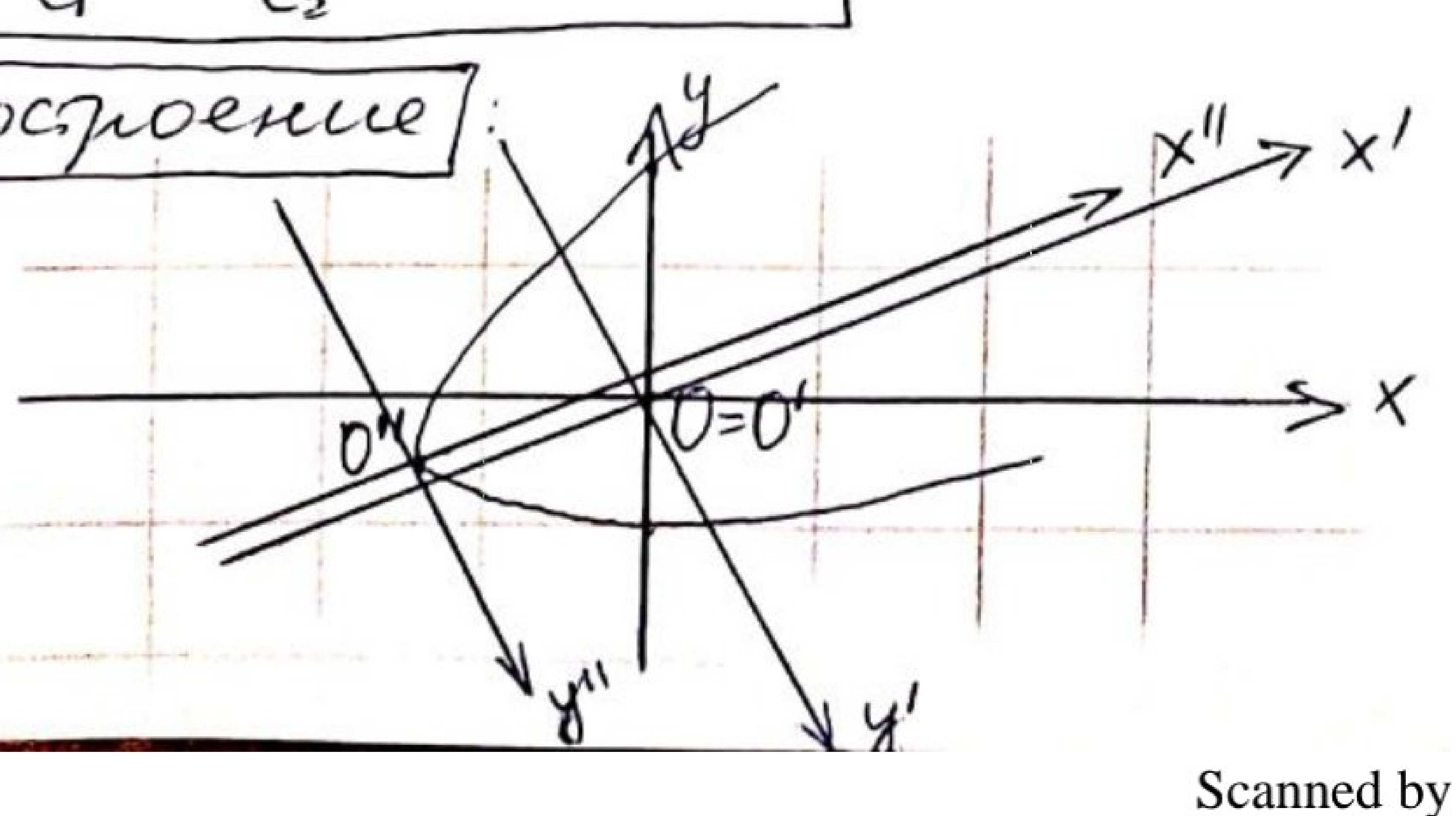
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{33}{25} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' - \frac{15}{25} \end{cases}$$

$\vec{e}_1{}''$ $\quad$ $\vec{e}_2{}''$ $\quad$ O''

$''\vec{e}_1{}'$ $\quad$ $''\vec{e}_2{}'$

Канонич. система к-т $- O''\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''$.

(5) Построение:



Д/З II Кривую 2-го порядка $9x^2-12xy+4y^2-6\sqrt{13}x+4\sqrt{13}y=\_$ привести к канонич. виду. Указать соотв. преобр-е координат. Построить кривую в исходной сист. к-т. 26

№5.

Привести к каноническому виду ур-е поверхности 2 порядка:

$$6xy+8xz+40x+50z+10=0.$$

Решение.

(1) Приведём квадр. форму $Q(x,y,z) = 6xy+8xz$ к канонич. виду ортогон. преобр-ем.

1) $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\3&0&0\\4&0&0\end{pmatrix}$; $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&3&4\\3&-\lambda&0\\4&0&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda^3+25\lambda=0$$

$$-\lambda(\lambda^2-25)=0$$

$\lambda_1=5$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=-5$

Канонич. вид: $5x'^2-5z'^2=Q(x',y',z')$ квадр. формы в переменных x',y',z'.

2) Ортогон. преобр-е:

Для $\lambda=5$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-5&3&4\\3&-5&0\\4&0&-5\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x=\frac{5}{4}z\\y=\frac{3}{4}z\\z=z\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Нормируем вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\sqrt{5^2+3^2+4^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{4}{3} z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Нормируем вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = -5$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{cases} x = -\frac{5}{4} z \\ y = \frac{3}{4} z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Нормируем. $\Rightarrow \vec{e_3}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Матрица перехода $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5\sqrt2} & 0 & -\frac{5}{5\sqrt2} \\ \frac{3}{5\sqrt2} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt2} \\ \frac{4}{5\sqrt2} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt2} \end{pmatrix}$

Ортогон. преобр-е $X = T_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}X'$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{5\sqrt2}x' - \frac{5}{5\sqrt2}z' \\ y = \frac{3}{5\sqrt2}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{3}{5\sqrt2}z' \\ z = \frac{4}{5\sqrt2}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{4}{5\sqrt2}z' \end{cases}$$

② Линейная форма в новых переменных.

$$40x + 50z = 40\left(\frac{5}{5\sqrt2}x' - \frac{5}{5\sqrt2}z'\right) + 50\left(\frac{4}{5\sqrt2}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{4}{5\sqrt2}z'\right) =$$

$$= \frac{400}{5\sqrt2}x' + \frac{150}{5}y' = 40\sqrt2\,x' + 30y'$$

Подставим в ур-е кривой:

$$5x'^2 - 5z'^2 + 40\sqrt2\,x' + 30y' + 10 = 0 \quad |:5$$

$$x'^2 - z'^2 + 8\sqrt2\,x' + 6y' + 2 = 0$$

③ Выделим полный квадрат по x':

$$x'^2 + 8\sqrt2\,x' = x'^2 + 2\cdot4\sqrt2\,x' + (4\sqrt2)^2 - (4\sqrt2)^2 =$$

$$= (x' + 4\sqrt2)^2 - 32$$

Подст. в ур-е кривой:

$$(x' + 4\sqrt2)^2 - z'^2 + 6y' + 2 - 32 = 0$$

$$(x' + 4\sqrt2)^2 - z'^2 + \underbrace{6y' - 30}_{6(y'-5)} = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + 4\sqrt2 \\ y'' = z' \\ z'' = -y' + 5 \end{cases}$$

$$x''^2 - y''^2 = 6z''$$

$$\frac{x''^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{y''^2}{\sqrt{3}^2} = 2z''$$

каноническ. ур-е гиперболич. параболоида („седло") $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 2z''$

Преобразование исходных к-т (не треб. найти)

$$\begin{cases} x = \frac{5}{5\sqrt{2}}x' - \frac{5}{5\sqrt{2}}z' = \frac{5}{5\sqrt{2}}(x''-4\sqrt{2}) - \frac{5}{5\sqrt{2}}y'' \\ y = \frac{3}{5\sqrt{2}}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{3}{5\sqrt{2}}z' = \frac{3}{5\sqrt{2}}(x''-4\sqrt{2}) - \frac{4}{5}(-z''+5) + \frac{3}{5\sqrt{2}}y'' \\ z = \frac{4}{5\sqrt{2}}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{4}{5\sqrt{2}}z' = \frac{4}{5\sqrt{2}}(x''-4\sqrt{2}) + \frac{3}{5}(-z''+5) + \frac{4}{5\sqrt{2}}y'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{5\sqrt{2}}x'' - \frac{5}{5\sqrt{2}}y'' + 0z'' - 4 \\ y = \frac{3}{5\sqrt{2}}x'' + \frac{3}{5\sqrt{2}}y'' + \frac{4}{5}z'' - \frac{32}{5} \\ z = \frac{4}{5\sqrt{2}}x'' + \frac{4}{5\sqrt{2}}y'' - \frac{3}{5}z'' - \frac{1}{5} \end{cases}$$

ДЗ III Решить аналог. задачу из модульного ДЗ.