Занятие 10

Непрерывность функций. Точки разрыва.

Опр Пусть $f(x)$ определена в нек. $U(x_0)$

Ф-я $f(x)$ наз. непр. в т. x_0, если

1) $\exists f(x_0)$, 2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ф-я $f(x)$ наз. разрывной в т. x_0, если нарушено хотя бы одно из условий 1), 2), 3); в этом сл. т. x_0 наз. точкой разрыва ф-ции

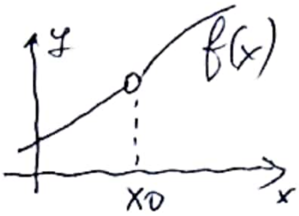
Типы точек разрыва

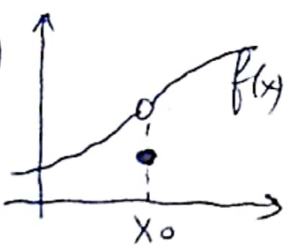
I рода: $\exists$ конечные односторонние пределы при $x \to x_0 \pm 0$

- устранимый разрыв — и они $=$.
- скачок — и они $\neq$.

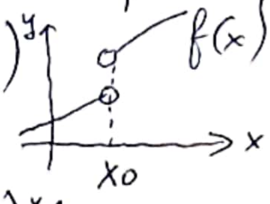
II рода: хотя бы один из односторонних пределов 1) или $=\infty$, 2) или $\nexists$

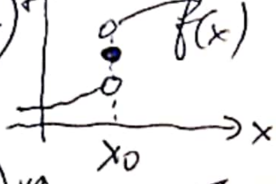
Примеры (устранимый разрыв)

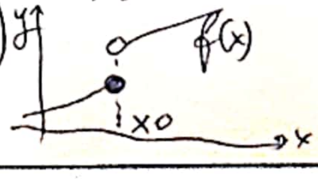
1)


2)


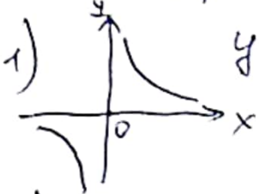
Примеры (скачок)

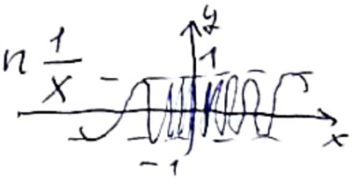
1)


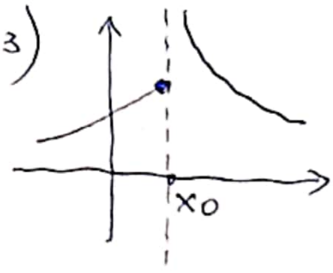
2)


3)


Примеры (II рода).

1) $y = \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$


2) $y = \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = 0$


3)


и т.д.

Найти точки разрыва ф-ции и исследовать их.
В случае устранимого разрыва доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной. Нарис. график $f(x)$ в окр-ти т. разрыва.

№1.388.

$$f(x)=\frac{|3x-5|}{3x-5}$$

Решение

1) $D(f)$: $3x-5\neq0$, т.е. $x\neq\frac{5}{3}$

$x\in(-\infty;\frac{5}{3})\cup(\frac{5}{3};+\infty)$

Ф-я $f(x)$ непр. на $D(f)$ как частное непрерывных ф-ций, т.к. знаменатель $\neq0$ на $D(f)$.

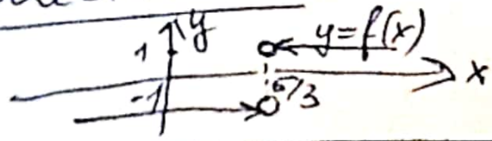
2) Исслед. точку $x=\frac{5}{3}$.

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}+0}\frac{|3x-5|}{3x-5}=\lim_{x\to\frac{5}{3}+0}\frac{\cancel{3x-5}}{\cancel{3x-5}}=\lim_{x\to\frac{5}{3}+0}1=1$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}-0}\frac{|3x-5|}{3x-5}=\lim_{x\to\frac{5}{3}-0}\frac{\overset{-1}{-\cancel{(3x-5)}}}{\cancel{(3x-5)}}=\lim_{x\to\frac{5}{3}-1}(-1)=-1$$

Т.к. конечные односторонние пределы $\exists$, но $\neq$, то $x=\frac{5}{3}$ т. разрыва I рода, типа скачок.

Пояснение: $|3x-5|=\begin{cases}3x-5 & \text{при } 3x-5\geq0\text{, т.е. } x\geq\frac{5}{3}\\ -(3x-5) & \text{при } 3x-5<0\text{, т.е. } x<\frac{5}{3}\end{cases}$

3) 

← Чертёж $f(x)$.

№1.390.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

Решение.

1) $D(f)$: $x\neq 0$, т.е. $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

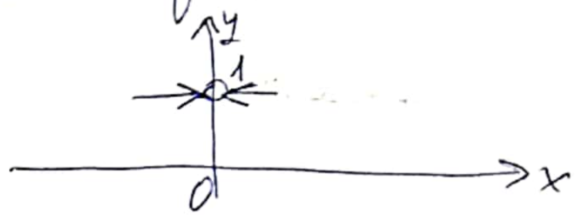
Ф-я $f(x)$ непр. на $D(f)$ как частное непр. ф-ций, т.к. на $D(f)$ знаменатель $\neq 0$.

2) Исслед. т. $x=0$.

$\exists \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (это I замечат. предел, но $\nexists f(0)$, т.к. $0\notin D(f)$)

Т.к. конечные односторонние пределы $\exists$, равны, но $\nexists f(0)$, то $x=0$ т. разрыва I рода, типа устранимый разрыв.

3) График $f(x)$ в окрестности т. $x=0$:



3) Доопределим ф-ю в т. $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$$

Теперь $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow$ ф-я $f(x)$ стала непр. в т. $x=0$

Теперь $f(x)$ непр. на $\mathbb{R}$. $\Longleftarrow$

№1.392.

$$f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$$

Решение.

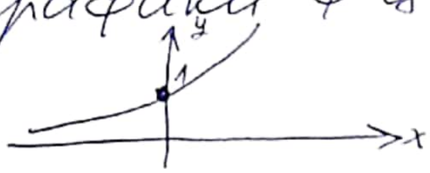
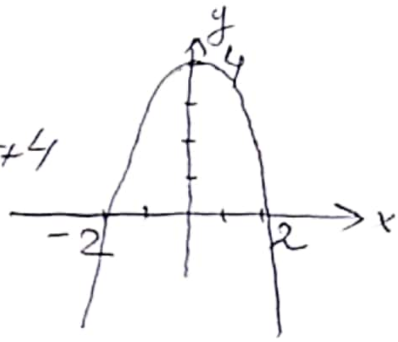
1) $D(f)$: $x\neq\pm 2$, т.е. $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$

Ф-я $f(x)$ непр. на $D(f)$ как композиция непр. ф-ций (т.е. $f(x)$ – это сложная ф-я)

(ф-я $y=\frac{x}{4-x^2}$ непр. на $D(f)$ как частное непр. ф-ций т.к. на $D(f)$ знам $\neq 0$).

2) Исслед. точки $x=\pm 2$.

Исп. графики ф-ций

$y=3^x$ 
; $y=4-x^2=-x^2+4$ 

Рас. $x=2$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} 3^{\overset{\to -\infty}{\frac{\overset{\to 2>0}{x}}{\underset{\to 0-}{4-x^2}}}}=0$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} 3^{\overset{\to +\infty}{\frac{\overset{\to 2>0}{x}}{\underset{\to 0+}{4-x^2}}}}=+\infty$$

Один из одностор. пределов при $x\to 2$ равен $\infty \Rightarrow x=2$ т. разрыва II рода

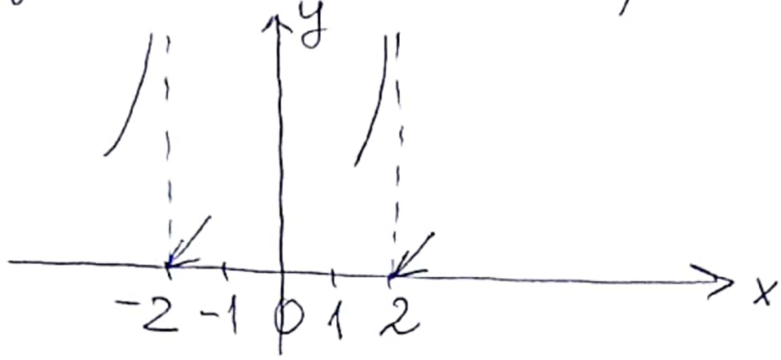
Рас. $x=-2$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0} 3^{\overset{\to -\infty}{\frac{\overset{\to -2<0}{x}}{\underset{\to 0+}{4-x^2}}}}=0$$

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0} 3^{\overset{\to +\infty}{\frac{\overset{\to -2<0}{x}}{\underset{\to 0-}{4-x^2}}}}=+\infty$$

Один из одностор. пределов при $x\to -2$ равен $\infty \Rightarrow x=-2$ т. разрыва II рода

3) Чертёж $f(x)$ в окр-ти т-к разрыва:



№1.394.

$$f(x)=\frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$$

Решение.

1) $D(f)$: $\operatorname{arctg}(x+2)\neq 0$, т.е. $x+2\neq 0$
$x\neq -2$; $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

Ф-я непр. на $D(f)$ как частное непр. ф-ций, т.к. на $D(f)$ знам. $\neq 0$

2) Исслед. т. $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\lim_{x\to -2+0}\frac{x+2}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg}(x+2)\sim\\ \sim x+2 \text{ при}\\ x\to -2\end{array}\right]=$$

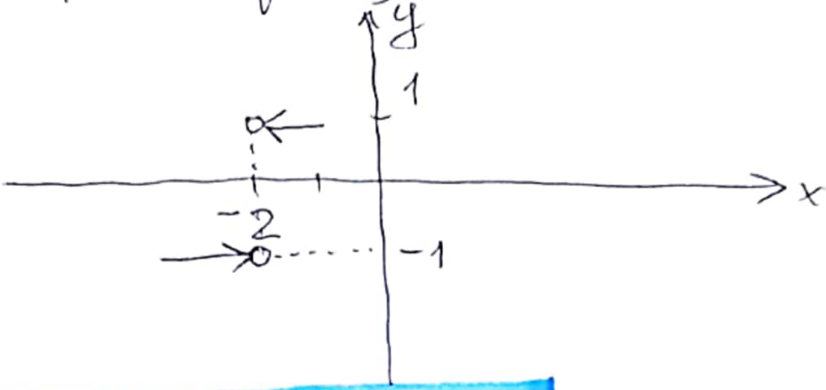
$$=\lim_{x\to -2+0}\frac{\cancel{x+2}^{\,1}}{\cancel{x+2}_{\,1}}=\lim_{x\to -2+0}1=1$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\lim_{x\to -2-0}\frac{-(x+2)}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to -2-0}\frac{-\cancel{(x+2)}^{\,-1}}{\cancel{x+2}_{\,1}}=\lim_{x\to -2-0}(-1)=-1$$

Т.к. конечные односторонние пределы $\exists$, но $\neq$, то $x=-2$ т. разрыва I рода типа скачок.

3) График $f(x)$ в окрестности т. $x=-2$



Д/З I № 1.387
1.389
1.391
1.393

№1.395.

$$f(x)=\frac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$$

Решение.

1) $D(f)$: $x\neq 2$, т. е. $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

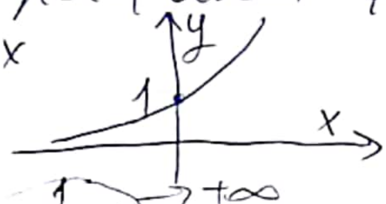
Ф-я $y=3^{\frac{1}{x-2}}$ непр. на $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ как композиция непр. ф-ций.

Ф-я $f(x)$ непр. на $D(f)$ как частное непр. ф-ций, т. к. на $D(f)$ знам. $\neq 0$.

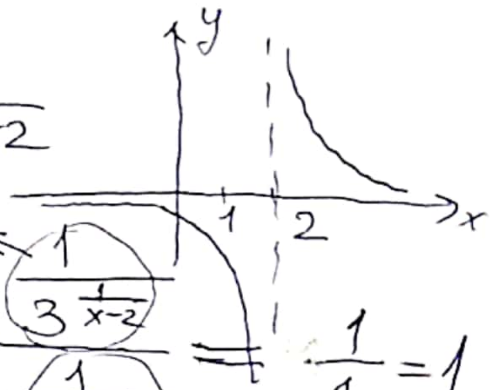
2) Иссл. т. $x=2$.

Исп. графики ф-ций

$y=3^x$



и $y=\frac{1}{x-2}$

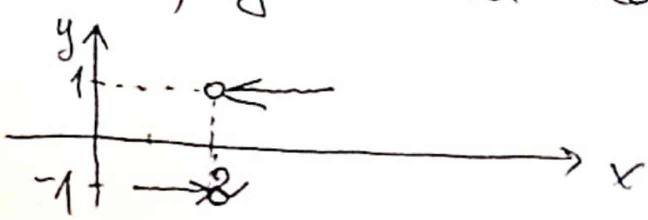


$$\lim_{x\to 2+0}\frac{\overset{\to+\infty}{3^{\frac{1}{x-2}}}-1}{\underset{\to+\infty}{3^{\frac{1}{x-2}}}+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 2+0}\frac{1-\overset{0\leftarrow}{\frac{1}{3^{\frac{1}{x-2}}}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{3^{\frac{1}{x-2}}}}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{\overset{\to 0}{3^{\frac{1}{x-2}}}-1}{\underset{\to 0}{3^{\frac{1}{x-2}}}+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

Т. к. конечные односторонние пределы $\exists$, но $\neq$, то $x=2$ – т. разрыва I рода типа скачок

3) График в окр-ти $x=2$



№1.397.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$$

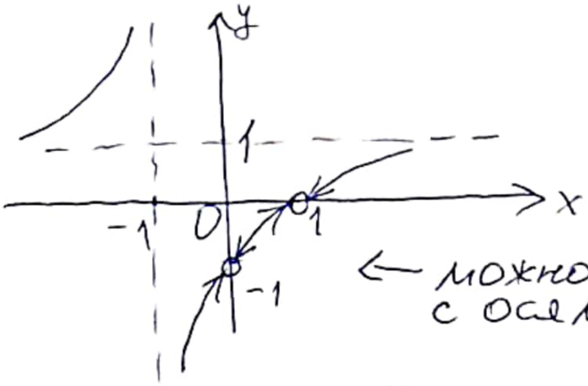
Решение.

1) $D(f)$: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x+1\neq 0 \\ x-1\neq 0 \\ \frac{1}{x-1}\neq\frac{1}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \\ x\neq 1 \end{cases}$, т.е. $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$

Преобразуем $f(x)$ на $D(f)$:

$$f(x)=\frac{\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}}{\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}}=\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-1-1}{x+1}=$$

$$=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}=\frac{-2}{x+1}+1$$ (сдвинутая гип-ла) с (выколотыми точками)



← можно найти т. П-я с осями координат

Ф-я непр. на $D(f)$.

2) Исслед. т. $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

$\boxed{x=-1}$ $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}\frac{x-1 \to -2}{x+1 \to 0-}=+\infty$ (или это видно из графика)

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{x-1 \to -2}{x+1 \to 0+}=-\infty$

Т.к. хотя бы один из одностор. пределов $=\infty$ (у нас оба равны ∞), то $x=-1$ т. разрыва II рода

$\boxed{x=0}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

Т.к. конечные одностор. пределы $\exists$ и равны, но $\nexists f(0)$, то $x=0$ т. разрыва I рода, устранимая

$\boxed{x=1}$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$

Т.к. конечные одностор. пределы $\exists$ и равны, но $\nexists f(1)$, то $x=1$ т. разрыва I рода, устранимая

Доопределим ф-ю в т. $x=0$ и $x=1$ так чтобы она стала непр. в этих точках

$$\boxed{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}} & \text{при } x\neq 0, x\neq -1, x\neq 1 \\ -1 & \text{при } x=0 \\ 0 & \text{при } x=1\end{cases} \quad \boxed{=\frac{x-1}{x+1}} \text{ получим}$$

$\boxed{\text{Д/З II } №1.396, 1.398, 1.400}$

№1.401

Задачи на одностороннюю непрерывность.

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{при } 0\le x\le 1\\ 4-2x & \text{при } 1<x<2{,}5\\ 2x-7 & \text{при } 2{,}5\le x\le 4\end{cases}$$

Решение.

1) $D(f)=[0;4]$

$f(x)$ непр. на $(0;1)$, $(1;2{,}5)$, $(2{,}5;4)$.

Иссл. точки $x=1$, $x=2{,}5$ и концы отрезка $x=0$ и $x=4$.

2) $\boxed{x=1}$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} 2\sqrt{x}=2\sqrt{1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} (4-2x)=4-2\cdot 1=2$

Одностор. пределы $\exists$, конечны и равны, то $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

$\exists f(1)=2\sqrt{1}=2$

т.к. $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, то $f(x)$ непр. в т. $x=1$.

$\boxed{x=2{,}5}$

$\lim\limits_{x\to 2{,}5-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2{,}5-0} (4-2x)=4-2\cdot 2{,}5=-1$

$\lim\limits_{x\to 2{,}5+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2{,}5+0} (2x-7)=2\cdot 2{,}5-7=-2$

Т.к. ∃ конечные одностор. пределы в т. $x=2,5$, но они $\neq$, то $x=2,5$ т. разрыва I рода, типа скачок.

Т.к. $\exists f(2,5)=2\cdot 2,5-7=-2$, то исслед. $f(x)$ в т. $x=2,5$ на одностороннюю непрерывность:

$\exists \lim\limits_{x\to 2,5+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2,5+0}(2x-7)=2\cdot 2,5-7=-2$.

Т.к. $\exists \lim\limits_{x\to 2,5+0} f(x)=f(2,5)$, то $f(x)$ непрерывна в т. $x=2,5$ справа

$\boxed{x=0}$

$\exists \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} 2\sqrt{x}=2\sqrt{0}=0=f(0) \Rightarrow$

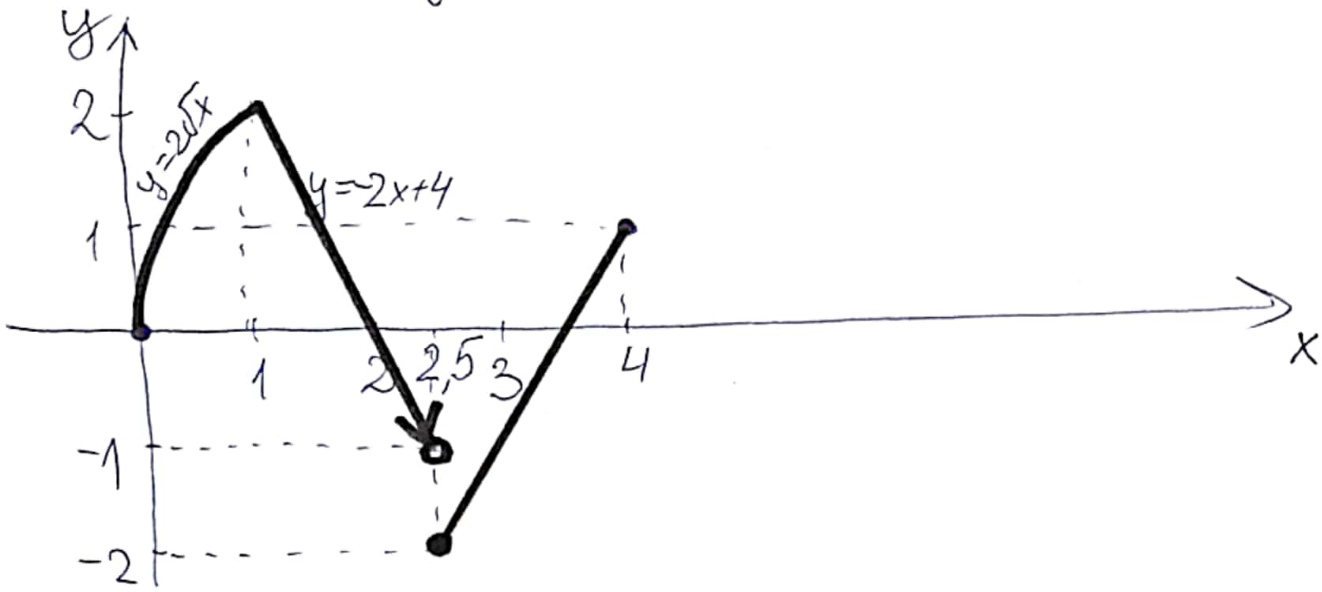
$\Rightarrow f(x)$ непрерывна в т. $x=0$ справа

$\boxed{x=4}$

$\exists \lim\limits_{x\to 4-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 4-0}(2x-7)=2\cdot 4-7=1=f(4) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ непрерывна в т. $x=4$ слева

3) График $f(x)$:



Д/З III №1.402, 1.399.