Занятие 12.

Дифференцирование. Правила дифференцирования.

Опр. Производной ф-ции $f(x)$ в т. x_0 наз. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \overset{\text{обозн.}}{=} f'(x_0)$.

Дифференцирование ф-ции — это процесс нахождение её производной.

Таблица производных: и см. с. 6

1. $(x^a)'=ax^{a-1}$ $(\overset{\text{при}}{a\neq 0})$; $x'=1$
2. $(a^x)'=a^x\cdot \ln a$ $(a>0)$; $(e^x)'=e^x$
3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(a>0, a\neq 1)$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$
5. $(\cos x)'=-\sin x$
6. $(tg\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $(ctg\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(arctg\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(arcctg\, x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

1. $c'=0$, где $c\in\mathbb{R}$
2. $(f+g)'=f'+g'$
3. $(fg)'=f'g+fg'$

   Сл. $(cf)'=c\cdot f'$, где $c\in\mathbb{R}$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$, где $g\neq 0$.

№5.6. ДЗ I. № 5.7; 5.3.

Найти приращение функции в т. x_0

$$\Delta f(x_0, \Delta x) \overset{\text{т.е.}}{=} f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

для функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

$$f(x_0) = e^1 = e \quad , f(x_0+\Delta x) = e^{1+\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f(x_0, \Delta x) = e^{1+\Delta x} - e = e(e^{\Delta x} - 1)$$

Ответ: $e(e^{\Delta x}-1)$.

№ 5.11. ДЗ II № 5.10, 5.12.

Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$ для функции $f(x) = 2^x$.

Решение.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = 2^x, f(x+\Delta x) = 2^{x+\Delta x} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = 2^x(2^{\Delta x}-1)$$

Подставим в предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 2^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 2^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot \ln 2}{\cancel{\Delta x}} =$$

$\boxed{2^x \text{ не зависит от } \Delta x}$ $\boxed{2^{\Delta x}-1 \sim \Delta x \ln 2 \text{ при } \Delta x \to 0}$

$$= 2^x \lim_{\Delta x \to 0} \ln 2 = 2^x \ln 2.$$

Ответ: $2^x \ln 2$.

$\boxed{\text{Св-ва степеней: } a^n a^m = a^{n+m}; \ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \ (a^n)^m = a^{nm}}$

Найти производные

№ 5.21

$$y = 3-2x+\frac{2}{3}x^4$$

$$y' = \left(3-2x+\frac{2}{3}x^4\right)' = 3' - (2x)' + \left(\frac{2}{3}x^4\right)' = 0 - 2\cdot x' + \frac{2}{3}(x^4)' =$$

$$= -2\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 4\cdot x^{4-1} = \boxed{-2+\frac{8}{3}x^3}$$

Это подробное решение;

<u>можно</u> сразу писать ответ (если умеете), <u>но нужно восстановить все подробности</u> на экзамене, если попросят.

№ 5.23.

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \overset{\text{перепишем так:}}{=} x^{-1} - x^{-2} - x^{-3}$$

$$y' = (x^{-1} - x^{-2} - x^{-3})' = (x^{-1})' - (x^{-2})' - (x^{-3})' =$$

$$= -1\cdot x^{-1-1} - (-2)x^{-2-1} - (-3)x^{-3-1} =$$

$$= -x^{-2} + 2x^{-3} + 3x^{-4} = \boxed{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}$$

Д/З III № 5.22

№ 5.27

$$y = \frac{1+3x^2}{\sqrt{2\pi}} \overset{\text{перепишем так}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(1+3x^2)$$

перепишем так, чтобы не исп. формулу производной от частного

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+3x^2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(1+3x^2)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1' + (3x^2)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0+3\cdot 2x^1) = \frac{6x}{\sqrt{2\pi}}$$

Сначала надо „готовить" функцию к дифф-ю, чтобы вычисления были макс. простыми.

Далее будем писать менее подробно

№5.29.

$$y=\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}=\frac{a}{x^{\frac{3}{5}}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{b}=a\cdot x^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{b}\cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=a\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)x^{-\frac{3}{5}-1}+\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=-\frac{3}{5}a\cdot x^{-\frac{8}{5}}+\frac{2}{3b}x^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{-\frac{3}{5}a}{x^{\frac{8}{5}}}+\frac{2}{3b}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\boxed{-\frac{3a}{5x\cdot\sqrt[5]{x^3}}+\frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}}$$

№5.35. Д/З IV №5.34.

$$y=\left(3\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^4}=3x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}=3x^{\frac{6}{3}}+6x^{\frac{5}{3}}=$$

$$=3x^2+6x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'=3\cdot 2x+\cancel{6}^{\,2}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}-1}=6x+10x^{\frac{2}{3}}=\boxed{6x+10\sqrt[3]{x^2}}$$

№5.37.

$$y=x^3\cdot ctgx$$

$$y'=(x^3)'ctgx+x^3(ctgx)'=3x^2ctgx+x^3\cdot\frac{-1}{\sin^2x}=$$

$$=3x^2ctgx-\frac{x^3}{\sin^2x}$$

№5.41 Д/З V №5.40

$$y=x\cdot\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)=x^{\frac{5}{3}}(2\ln x-3^x)$$

$$y'=(x^{5/3})'(2\ln x-3^x)+x^{\frac{5}{3}}(2\ln x-3^x)'=$$

$$=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}(2\ln x-3^x)+x^{\frac{5}{3}}\left(2\cdot\frac{1}{x}-3^x\ln 3\right)=$$

$$\boxed{=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\left(2\ln x-3^x\right)+x\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{2}{x}-3^x\ln 3\right).}$$

№5.39.

ДЗ VI №5.44, 5.42 (5)
5.38, 5.32.

$$y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$y'=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x\cdot(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=\boxed{-\frac{1}{1+\sin x}}$$

Производная сложной функции

$$z = f(\varphi(x)) \Rightarrow z'(x_0) = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0),$$

где $y_0 = \varphi(x_0)$ и $\exists f'(y_0), \varphi'(x_0)$.

Таблица производных для сложных ф-ций

1. $\left(\varphi^a(x)\right)' = a \cdot \varphi^{a-1}(x) \cdot \varphi'(x)$

2. $\left(a^{\varphi(x)}\right)' = a^{\varphi(x)} \ln a \cdot \varphi'(x)$; $\left(e^{\varphi(x)}\right)' = e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$

3. $\left(\log_a \varphi(x)\right)' = \dfrac{1}{\varphi(x) \ln a} \cdot \varphi'(x)$; $\left(\ln \varphi(x)\right)' = \dfrac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$

4. $\left(\sin \varphi(x)\right)' = \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x)$

5. $\left(\cos \varphi(x)\right)' = -\sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)$

6. $\left(\operatorname{tg} \varphi(x)\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 \varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$

7. $\left(\operatorname{ctg} \varphi(x)\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 \varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$

8. $\left(\arcsin \varphi(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} \cdot \varphi'(x)$

9. $\left(\arccos \varphi(x)\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} \cdot \varphi'(x)$

10. $\left(\operatorname{arctg} \varphi(x)\right)' = \dfrac{1}{1 + \varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x)$

11. $\left(\operatorname{arcctg} \varphi(x)\right)' = \dfrac{-1}{1 + \varphi^2(x)} \cdot \varphi'(x)$

№ 5.49 Д/З VII № 5.50

$$y=(\underbrace{1+4x^2}_{\varphi(x)})^3$$

$$y'=3(1+4x^2)^2\cdot(1+4x^2)'=3(1+4x^2)^2(0+8x)=\boxed{24x(1+4x^2)^2}$$

№ 5.48. Д/З VIII № 5.47.

$$y=6\cos\frac{2x}{3}$$

$$y'=6\left(\cos\frac{2x}{3}\right)'=6\cdot\left(-\sin\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)'=-\cancel{6}^{\,2}\sin\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=$$

сразу выносим число

$$=\boxed{-4\sin\frac{2x}{3}}.$$

№ 5.45 Д/З IX № 5.46

$$y=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{x^5+a}=x^{\frac{3}{2}}(x^5+a)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(x^5+a)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}\left((x^5+a)^{\frac{1}{3}}\right)'=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x^5+a)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{3}(x^5+a)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^5+a)'=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x^5+a)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}(x^5+a)^{-\frac{2}{3}}\cdot5x^4=$$

$$=\frac{3x^{\frac{1}{2}}(x^5+a)^{\frac{1}{3}}}{2}^{\;3(x^5+a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{3(x^5+a)^{\frac{2}{3}}}^{\;2}=$$

$$\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$$

$$=\frac{9x^{\frac{1}{2}}(x^5+a)+10x^{\frac{11}{2}}}{6(x^5+a)^{\frac{2}{3}}}=\frac{9x^{\frac{1}{2}}(x^5+a)+10x^5x^{\frac{1}{2}}}{6(x^5+a)^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot(9x^5+9a+10x^5)}{6(x^5+a)^{\frac{2}{3}}}=\boxed{\frac{\sqrt{x}\,(19x^5+9a)}{6\sqrt[3]{(x^5+a)^2}}}$$

$\boxed{f(\varphi(\psi(x)))}$

№5.51.

Д/З X №5.52, 5.54

8

$$y = \sin^2\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y' = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2-1}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)' = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)' = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sin x}$$

№5.55.

$$y = \sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3} = (1+\sin^2 x)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{4}-1}\cdot(1+\sin^2 x)' =$$

$$= \frac{3}{4}(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{4}}\left(0+2\sin x(\sin x)'\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{4}}} = \boxed{\frac{3}{4}\frac{\sin 2x}{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}}$$

№5.53

$$y = x\arcsin\ln x$$

$$y' = x'\arcsin\ln x + x(\arcsin\ln x)' =$$

$$= \arcsin\ln x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}\cdot(\ln x)' =$$

$$= \arcsin\ln x + \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$= \arcsin\ln x + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

№ 5.57 Д/З XI № 5.56

$$y = e^{\frac{x}{3}}\cos^2\frac{x}{3}$$

$$y' = \left(e^{\frac{x}{3}}\right)'\cos^2\frac{x}{3} + e^{\frac{x}{3}}\left(\cos^2\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)'\cos^2\frac{x}{3} + e^{\frac{x}{3}}\,2\cos\frac{x}{3}\left(\cos\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= e^{\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x}{3} + e^{\frac{x}{3}}\,2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{x}{3} - 2\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\cos^2\frac{x}{3} - \sin\frac{2x}{3}\right)}$$