Занятие 13.

Производная сложной функции (продолжение)

№5.59.

$$y = \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y' = \left(\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \boxed{\frac{1}{\cos x}}$$

№5.61.

$$y = \sqrt{arcctg \frac{x}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(arcctg \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(arcctg \frac{x}{2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{arcctg \frac{x}{2}}} \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}\,(4+x^2)}}$$

№ 5.63.

ДЗ I № 5.60
5.62
5.64
5.65.

$$y = \cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$$

$$y' = 2\cos^{2-1}\left(\sin\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\cos\left(\sin\frac{x}{3}\right)\right)' =$$

$$= 2\cos\left(\sin\frac{x}{3}\right)\left(-\sin\left(\sin\frac{x}{3}\right)\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= -2\cos\left(\sin\frac{x}{3}\right)\sin\left(\sin\frac{x}{3}\right)\cdot\cos\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3}\sin\left(2\sin\frac{x}{3}\right)\cos\frac{x}{3}}$$

№ 5.67

ДЗ II № 5.68

$$y = \sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$$

$$y' = (\sqrt{x})' e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{x}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}$$

№ 5.73

$$y = \log_2(\ln 2x)$$

$$y' = \frac{1}{\ln 2x\cdot\ln 2}(\ln 2x)' = \frac{1}{\ln 2\,\ln 2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)' =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x\ln 2\ln(2x)}}$$

ДЗ II № 5.71
5.74

Вводя промежуточные переменные, вычислить производную функции.

№ 5.95

Д/З IV № 5.94

$$y=\frac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$$

Введём $u(x)=e^{-x^2}$.

Перепишем: $y=\dfrac{u(x)\cdot\arcsin u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$$y'=\frac{\left(u(x)\arcsin u(x)\right)'\sqrt{1-u^2(x)}-u(x)\arcsin u(x)\left(\sqrt{1-u^2(x)}\right)'}{\left(\sqrt{1-u^2(x)}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u'(x)\arcsin u(x)+u(x)\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}u'(x)\right)\sqrt{1-u^2(x)}-u(x)\arcsin u(x)\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-u^2(x)}}\left(-\cancel{2}u(x)\cdot u'(x)\right)}{1-u^2(x)}=$$

$$=\frac{u'(x)\left(\arcsin u(x)+\frac{u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\right)(1-u^2(x))+\arcsin u(x)\cdot u^2(x)u'(x)}{(1-u^2(x))\sqrt{1-u^2(x)}}=$$

$$=\frac{u'(x)\left(\arcsin u(x)-\cancel{\arcsin u(x)\cdot u^2(x)}+\frac{u(x)}{\sqrt{\ }}-\frac{u^3(x)}{\sqrt{\ }}+\cancel{\arcsin u(x)u^2(x)}\right)}{(1-u^2(x))^{3/2}}=$$

$$=\frac{u'(x)\left(\arcsin u(x)+\frac{u(x)\cancel{(1-u^2(x))}^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\sqrt{1-u^2(x)}}}\right)}{(1-u^2(x))^{3/2}}=\frac{u'(x)\left(\arcsin u(x)+u(x)\sqrt{1-u^2(x)}\right)}{(1-u^2(x))^{3/2}}=$$

Вернёмся к x:

$$\boxed{=\frac{e^{-x^2}(-2x)\left(\arcsin e^{-x^2}+e^{-x^2}\sqrt{1-e^{-2x^2}}\right)}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{3/2}}}$$

продолжим брать произв. сложных ф-ций: №5.101 $\boxed{\text{Д/З V №5.102, 5.106.}}$

$\boxed{4}$

$$y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}=(1-x)^{\frac{m}{m+n}}(1+x)^{\frac{n}{m+n}}$$

считаем, что это „законно" для этого выражения

$$y'=\left((1-x)^{\frac{m}{m+n}}\right)'(1+x)^{\frac{n}{m+n}}+(1-x)^{\frac{m}{m+n}}\left((1+x)^{\frac{n}{m+n}}\right)'=$$

$$=\frac{m}{m+n}(1-x)^{\frac{m}{m+n}-1}(1-x)'(1+x)^{\frac{n}{m+n}}+$$

$$+\frac{n}{m+n}(1-x)^{\frac{m}{m+n}}(1+x)^{\frac{n}{m+n}-1}(1+x)'=$$

$\boxed{\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\sqrt[2k]{|b|}}$

модуль мы проигнорир. в решении

$$=\frac{m}{m+n}(1-x)^{\frac{\cancel{m}-\cancel{m}-n}{m+n}}(-1)(1+x)^{\frac{n}{m+n}}+$$

$$+\frac{n}{m+n}(1-x)^{\frac{m}{m+n}}(1+x)^{\frac{\cancel{n}-m-\cancel{n}}{m+n}}=$$

$$=\frac{-m}{m+n}(1-x)^{\frac{-n}{m+n}}(1+x)^{\frac{n}{m+n}}+\frac{n}{m+n}(1-x)^{\frac{m}{m+n}}(1+x)^{-\frac{m}{m+n}}=$$

$$=\frac{1}{m+n}\left(n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{m+n}}-m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right)$$

№5.105

$$y=\ln(\ln^n(mx))=\ln(\ln(mx))^n=n\ln(\ln(mx))$$

считаем, что „можно"

$$y'=n\frac{1}{\ln(mx)}\cdot(\ln(mx))'=\frac{n}{\ln(mx)}\cdot\frac{1}{mx}(mx)'=$$

$$=\frac{n\cdot\cancel{m}}{\ln(mx)\cdot\cancel{m}x}=\frac{n}{\ln(mx)\cdot x}$$

$\boxed{\ln(x)^{2k}=2k\ln|x|}$

модуль мы проигнорир.

№ 5.108.

$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)^2$

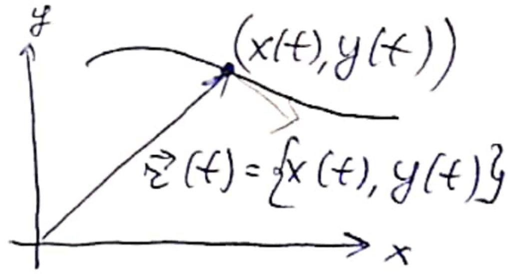
$$y' = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}^2 x)^2} \cdot (\operatorname{tg}^2 x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^4 x} \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x}(\operatorname{tg}^2 x+1)}$$

Сл. из осн. триг. тождества: $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть $\boxed{x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (\alpha, \beta)}$ *



Пусть для ф-ции $x(t)$ $\exists$ обратная ф-я $t = t(x)$.

Функция $y = y(t(x))$ наз. функцией, заданной параметрически соотношениями (*).

Из теории: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ $\left(\text{т.е. } \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$

№ 5.168

Для функции, заданной параметрически, найти y'_x.

$x = 2t,\ y = 3t^2 - 5t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(3t^2-5t)'}{2t'} = \frac{6t-5}{2} = \boxed{3t-\frac{5}{2}}$$

№ 5.171

$x=2^{-t}$, $y=2^{2t}$, $t\in(-\infty,+\infty)$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(2^{2t})'}{(2^{-t})'} = \frac{2^{2t}\cancel{\ln 2}\cdot(2t)'}{2^{-t}\cancel{\ln 2}\cdot(-t)'} = 2^{2t}2^{t}\cdot\frac{2}{-1} =$$

$$= -2^{2t+t+1} = \boxed{-2^{3t+1}}$$

№ 5.173.

$x=\operatorname{tg} t$, $y=\sin 2t+2\cos 2t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos 2t\cdot(2t)'+2(-\sin 2t)(2t)'}{\frac{1}{\cos^2 t}} =$$

$$= \frac{\cos 2t\cdot 2-2\cdot\sin 2t\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \boxed{2\cos^2 t(\cos 2t-2\sin 2t)}$$

Д/З VI № 5.169, 5.172, 5.176, 5.178

№ 5.175

$x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg} t$, $t\in(0;+\infty)$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}(1+t^2)'} = \frac{\frac{\cancel{1}+t^2-\cancel{1}}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \boxed{\frac{t}{2}}$$

№ 5.177

$x=\arcsin(t^2-1)$, $y=\arccos\frac{t}{2}$, $t\in(0,\sqrt{2})$

$$y'_x = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)'}{\frac{1}{\sqrt{1-(t^2-1)^2}}\cdot(t^2-1)'} = \frac{\frac{-1}{\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{\cancel{1}-t^4+2t^2-\cancel{1}}}\cdot 2t} = \boxed{\frac{-\sqrt{2t^2-t^4}}{\sqrt{4-t^2}\cdot 2t}}$$

№ 5.180

ДЗ VIII № 5.182

Найти y'_x в указанной точке:

$x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$, $t = 1$

Решение.

1) $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$y'(t) = \left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{(\ln t)' t - \ln t \cdot t'}{t^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t} - \ln t \cdot 1}{t^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

$$x'(t) = (t \ln t)' = t' \ln t + t(\ln t)' = 1 \cdot \ln t + \cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} =$$

$$= \ln t + 1$$

Подставим в y'_x:

$$y'_x = \frac{\frac{1 - \ln t}{t^2}}{1 + \ln t} = \frac{1 - \ln t}{(1 + \ln t)t^2}$$

2) $y'_x(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 + \ln 1)1^2} = \frac{1 - 0}{(1 + 0)1^2} = \boxed{1}$

Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

ДЗ VIII: проверить формулы для производных, найти и нарис. графики.

№5.179.

$x = a\operatorname{sh} t$, $y = b\operatorname{ch} t$, $t \in (0; +\infty)$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b(\operatorname{ch} t)'}{a(\operatorname{sh} t)'} = \frac{b\operatorname{sh} t}{a\operatorname{ch} t} = \boxed{\frac{b}{a}\operatorname{th} t}$$