Занятие 14.

Логарифмическая производная.

Логарифмической производной ф-ции $f(x)$ наз производная от логарифма этой функции:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ (если она } \exists\text{)}.$$

Использование.

$$f'(x) = (\ln f(x))' \cdot f(x)$$

Лог. дифференцирование исп., когда непосредственное вычисление производной от логарифма ф-ции проще, чем от самой функции.

№ 5.81.

Используя предварительное логарифмирование, найти производную функции

$$y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}.$$

Решение.

обоснование метода проводить не будем

1) Найдём $\ln y = \ln \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3} =$ (не будем рас. отдельно $y>0$ и $y<0$)

$= \ln(x-3)^2 + \ln|2x-1| - \ln|(x+1)^3| =$

$= 2\ln|x-3| + \ln|2x-1| - 3\ln|x+1|$

Напоминание. $\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$.

2) Найдём

$$(\ln y)' = 2\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)' - 3\cdot\frac{1}{x+1} =$$

Мы исп. утверждение $\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ для } x \neq 0}$

$$= \frac{2}{x-3} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+1}$$

3) $$y' = (\ln y)'\cdot y = \left(\frac{2}{x-3} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+1}\right)\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2(2x-1)(x+1) + 2(x-3)(x+1) - 3(x-3)(2x-1)}{\cancel{(2x-1)}\cancel{(x-3)}(x+1)}\cdot\frac{(x-3)^{\cancel{2}}\cancel{(2x-1)}}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2(2x^2+x-1) + 2(x^2-2x-3) - 3(2x^2-7x+3)}{(x+1)^4}\cdot(x-3) =$$

$$= \frac{4x^2+2x-2+2x^2-4x-6-6x^2+21x-9}{(x+1)^4}\cdot(x-3) =$$

$$= \boxed{\frac{(19x-17)(x-3)}{(x+1)^4}}$$

Д/З I № 5.82
5.84

№ 5.83.

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$$

Решение:

1) $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|2x+1|$

2) $(\ln y)' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\,\frac{2}{2x+1} =$

$$= \frac{1}{2(x+2)}^{\backslash 3(x-1)(2x+1)} - \frac{2}{3(x-1)}^{\backslash 2(x+2)(2x+1)} - \frac{2}{3(2x+1)}^{\backslash 2(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{3(2x^2-x-1)-4(2x^2+5x+2)-4(x^2+x-2)}{6(x+2)(x-1)(2x+1)} =$$

$$= \frac{-6x^2-27x-3}{6(x+2)(x-1)(2x+1)} = \frac{-\overset{1}{\cancel{3}}(2x^2+9x+1)}{\underset{2}{\cancel{6}}(x+2)(x-1)(2x+1)} =$$

$$= \frac{-(2x^2+9x+1)}{2(x+2)(x-1)(2x+1)}$$

3) $$y' = (\ln y)'y = \frac{-(2x^2+9x+1)}{2(x+2)(x-1)(2x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,\sqrt[3]{2x+1}} =$$

$$= \boxed{\frac{-(2x^2+9x+1)}{2\sqrt{x+2}\,(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}\,(2x+1)\cdot\sqrt[3]{2x+1}}}$$

№ 5.85.

$y = x^x$

Решение.

1) $\ln y = \ln x^x = x \ln x$

2) $(\ln y)' = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} =$
$= \ln x + 1$

3) $y' = (\ln y)' \cdot y = \boxed{(\ln x + 1) \cdot x^x}$.

№ 5.87.

$y = (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}$

Решение. $D(y): x > 0$.

1) $\ln y = \sqrt[3]{x} \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x} \ln x$

2) $(\ln y)' = \frac{1}{2}\left((\sqrt[3]{x})' \ln x + \sqrt[3]{x}(\ln x)'\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1^{\llcorner 3}}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x + 3}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\ln x + 3)}{6 \cdot \sqrt[3]{x}^2}$

3) $y' = (\ln y)' \cdot y = \boxed{\frac{(\ln x + 3)}{6 \cdot \sqrt[3]{x}^2} \cdot (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}}$

$\boxed{\text{Д/З II № 5.86, 5.88}}$

№ 5.89.

$y=(\sin x)^{\arcsin x}$

Решение. $D(y)$: $\sin x>0$.

1) $\ln y=\arcsin x \ln|\sin x|=\arcsin x\cdot\ln(\sin x)$

2) $(\ln y)'=(\arcsin x)'\ln(\sin x)+\arcsin x(\ln(\sin x))'=$

$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(\sin x)+\arcsin x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=$

$=\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot \operatorname{ctg} x$

3) $y'=(\ln y)'y=\boxed{\left(\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x\right)(\sin x)^{\arcsin x}}$

№ 5.92

$y=x^{x^2}+x^{2^x}+2^{x^x}$

Решение. $D(y)$: $x>0$.

$y'=(x^{x^2})'+(x^{2^x})'+(2^{x^x})'$

Рас. 3 функции $y_1=x^{x^2}$, $y_2=x^{2^x}$, $y_3=2^{x^x}$

Найдём y_1', y_2', y_3' и сложим их: $y'=y_1'+y_2'+$
$+y_3'$.

1 Для $y_1=x^{x^2}$

1) $\ln y_1=x^2\ln x$

2) $(\ln y_1)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=$

$=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

3) $y_1'=(\ln y_1)'y_1=x(2\ln x+1)\cdot x^{x^2}$.

② Для $y_2 = x^{2^x}$

1) $\ln y_2 = 2^x \ln x$

2) $(\ln y_2)' = (2^x)' \ln x + 2^x (\ln x)' = 2^x \ln 2 \ln x + 2^x \cdot \frac{1}{x} =$

$$= 2^x \left(\ln 2 \ln x + \frac{1}{x}\right)$$

3) $y_2' = (\ln y_2)' \cdot y_2 = 2^x \left(\ln 2 \ln x + \frac{1}{x}\right) \cdot x^{2^x}$

③ Для $y_3 = 2^{x^x} = 2^{(x^x)}$ ← это показатель
← основание – это число

1) $y_3' = 2^{x^x} \ln 2 \cdot (x^x)'$

2) $(x^x)' = (\ln x + 1) x^x$ из № 5.85 $\Rightarrow$

$y_3' = 2^{x^x} \ln 2 \, (\ln x + 1) \cdot x^x$

След., $y' = y_1' + y_2' + y_3' =$

$$= \boxed{x^{x^2} \cdot x (2 \ln x + 1) + x^{2^x} \cdot 2^x \left(\ln 2 \ln x + \frac{1}{x}\right) + 2^{x^x} \ln 2 \, (\ln x + 1) \, x^x.}$$

ДЗ III № 5.91

№ 5.111.

$$y=\sqrt{x}^{\sin^2 x}$$

Решение. $D(y): x>0$.

1) $\ln y=\sin^2 x\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\sin^2 x\ln x$

2) $(\ln y)'=\frac{1}{2}\left((\sin^2 x)'\ln x+\sin^2 x\cdot(\ln x)'\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(2\sin x\cos x\cdot\ln x+\sin^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\frac{\sin^2 x}{x}\right)$

3) $y'=(\ln y)'y=\boxed{\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\frac{\sin^2 x}{x}\right)\cdot\sqrt{x}^{\sin^2 x}}$

$\boxed{\text{Д/З } \underline{\text{IV}}.\ \text{№ } 5.110,\ 5.112}$

Дифференцирование функций, заданных неявно.

Функция $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, задана неявно ур-ем

$$F(x,y)=0,$$

если $\forall x\in(a,b)$ $F(x,f(x))=0$.

Зам. Ур-е $F(x,y)=0$ задаёт функцию $y=f(x)$ лишь при выполнении нек. условий. Будем считать, что эти условия выполняются (т-ма о неявн. ф-ции)

План нахождения производной ф-ции $f(x)$, заданной неявно.

1) Продифференцировать по x уравнение
$$F(x,y)=0,$$
считая y - функцией.

2) Выразить из получивш. равенства y'.

№ 5.144.

Найти значение y'_x в т. $x=1$, если

$\underbrace{x^3-2x^2y^2+5x+y-5}_{F(x,y)}=0$, $y(1)=1$.

Решение. 1) Дифф. ур-е по x, считая $y=y(x)$:

$$(x^3-2x^2y^2+5x+y-5)'_x=0'_x$$

$$3x^2-2(\underbrace{2x}_{(x^2)'}y^2+x^2\cdot\underbrace{2y\cdot y'}_{(y^2)'})+5+y'-0=0$$

$$3x^2-4xy^2-4x^2y\cdot y'+5+y'=0$$

2) Выразим y':

$$3x^2-4xy^2+5+y'(1-4x^2y)=0$$

$$y'\cdot(4x^2y-1)=3x^2-4xy^2+5$$

$$y'=\frac{3x^2-4xy^2+5}{4x^2y-1}$$

3) Найдём $y'(1)$.
Для этого подставим $x=1$ в прав. часть и учтём, что $y(1)=1$:

$$y'(1)=\frac{3\cdot1^2-4\cdot1\cdot1^2+5}{4\cdot1^2\cdot1-1}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

Ответ: $y'_x(1)=\frac{4}{3}$

↑индекс x можно не писать, т.к. $y=y(x)$.

№ 5.146.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Решение. Можно не переносить 1 влево.

1) Дифф. ур-е по x: $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)'=1'$

$$\frac{1}{a^2}2x+\frac{1}{b^2}2y\cdot y'=0 \quad |:2$$

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\cdot y'=0$$

2) Выразим y': $y'=-\dfrac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}}=\boxed{-\dfrac{xb^2}{ya^2}}$

№ 5.148

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, \quad a>0. \qquad y'(x)-?$

Решение.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})'_x=(\sqrt{a})'_x$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0 \quad |\cdot 2$

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot y'=0$

$\frac{y'}{\sqrt{y}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\boxed{y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}$$

№ 5.150

$e^x\sin y-e^y\cos x=0. \qquad y'(x)-?$

Решение.

$(e^x\sin y-e^y\cos x)'_x=0'_x$

$(e^x)'\sin y+e^x(\sin y)'-(e^y)'\cos x-e^y(\cos x)'=0$

$e^x\sin y+e^x\cos y\cdot y'-e^y\cdot y'\cos x-e^y(-\sin x)=0$

$e^x\sin y+e^y\sin x+y'(e^x\cos y-e^y\cos x)=0$

$$\boxed{y'=\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}}$$

№ 5.152.

$2^x+2^y=2^{x+y}$ $\quad y'(x)-?$

Решение.

$(2^x+2^y)'_x=(2^{x+y})'_x$

$(2^x)'_x+(2^y)'_x=(2^{x+y})'_x$

$2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot y'=2^{x+y}\ln 2\,(x+y)'_x \quad |:\ln 2\neq 0$

$2^x+2^y\cdot y'=2^{x+y}(1+y')$

$2^x+2^y y'=2^{x+y}+2^{x+y}y'$

$2^x-2^{x+y}=(2^{x+y}-2^y)y'$

$$y'=\frac{2^x-2^{x+y}}{2^{x+y}-2^y}$$

$$\boxed{y'=\frac{2^x(1-2^y)}{2^y(2^x-1)}}$$

Можно также упростить так. Из усл: $2^{x+y}=2^x+2^y$.
Подставим в

$$y'=\frac{2^x-2^{x+y}}{2^{x+y}-2^y}=\frac{\cancel{2^x}-(\cancel{2^x}+2^y)}{(2^x+\cancel{2^y})-\cancel{2^y}}=\frac{-2^y}{2^x}=\boxed{-2^{y-x}}$$

№ 5.154

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad y'(x)-?$

Решение.

$\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x$$

$$\frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y\cdot x'}{\cancel{x^2}}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(\cancel{2}x+\cancel{2}yy')$$

$$\frac{y'x-yx'}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2} \qquad \Big|\cdot(x^2+y^2)$$

$$y'x-yx'=x+yy'$$

$$y'(x-y)=x+y$$

$$\boxed{y'=\frac{x+y}{x-y}}$$

Замечание.
Т.к. $y=y(x)$, то $y'_x \overset{\text{это}}{=} y'$; значит, нижний индекс x можно не писать.

Д/З $\overline{\text{V}}$ №5.147
5.149
5.151
5.153
5.155

№5.156.

$x^y=y^x \qquad y'(x)-?$

Решение.

1) Возьмём $\ln$ от лев. и прав. части

$$\ln x^y=\ln y^x$$

$$y\ln x=x\ln y$$

2) Продифф. обе части ур-я по x:

$$y'\ln x+y(\ln x)'=x'\ln y+x(\ln y)'_x$$

$$y'\ln x+y\frac{1}{x}=\ln y+x\frac{1}{y}\cdot y'$$

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'$$

$$y'\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}\Rightarrow y'\frac{y\ln x-x}{y}=\frac{x\ln y-y}{x}$$

$$\boxed{y'=\frac{(x\ln y-y)y}{(y\ln x-x)x}}$$

Производные высших порядков.

$$y''(x) = (y'(x))'$$

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'$$

№ 5.186.

Найти производные 2-го порядка ф-ции $y(x)$

$y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$

Решение.

$$y = \frac{1}{3}\log_2(1-x^2)$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\log_2(1-x^2)\right)' = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x^2)\ln 2}\cdot(1-x^2)' =$$

$$= \frac{-2x}{3\ln 2(1-x^2)}$$

$$y'' = -\frac{2}{3\ln 2}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = -\frac{2}{3\ln 2}\frac{x'(1-x^2) - x\overbrace{(1-x^2)'}^{-2x}}{(1-x^2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{3\ln 2}\frac{(1-x^2+2x^2)}{(1-x^2)^2} \boxed{= \frac{-2(1+x^2)}{3\ln 2(1-x^2)^2}}$$

№ 5.188.

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Решение.

$$y' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-x^2}^{\,2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cancel{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$y''=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)'(1-x^2)^{3/2}-\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)\left((1-x^2)^{3/2}\right)'}{\left((1-x^2)^{3/2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\cancel{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}+1\cdot\arcsin x+\cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\right)(1-x^2)^{3/2}-\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)\frac{3}{\cancel{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-\cancel{2}x)}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\arcsin x\cdot(1-x^2)+3x\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)\right)}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{\arcsin x-x^2\arcsin x+3x\sqrt{1-x^2}+3x^2\arcsin x}{(1-x^2)^{2\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\,(2x^2+1)}{(1-x^2)^{2\frac{1}{2}}}=$$

$$\boxed{=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{\arcsin x\,(2x^2+1)}{(1-x^2)^{5/2}}}$$

Д/З VI
№ 5.184
5.187
5.189

Найти формулу для n-й производной ф-ии:

№ 5.201.

$$\left.\begin{aligned} &y=\sin x\\ &y'=\cos x\\ &y''=-\sin x\\ &y'''=-\cos x\\ &y''''=\sin x\\ &\text{и т.д.}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &y^{(4n)}=\sin x\\ &y^{(4n+1)}=\cos x\\ &y^{(4n+2)}=-\sin x\\ &y^{(4n+3)}=-\cos x\end{aligned}\quad,\ n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$$

№ 5.202.

$y=\ln x$

Решение.

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ y'' &= -x^{-2} \\ y''' &= 2x^{-3} \\ y'''' &= -6x^{-4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

и т.д.

Д/З VII № 5.200, 5.203.

Найти производную 2 пор. для ф-ции, заданной неявно

План.

1) Дифференцируем ур-е $F(x,y)=0$ и находим $y'=y'(x,y)$
2) Дифференцируем 1-ю производную из 1) и находим y''. Вместо y' в y'' подставляем y' из 1).

№ 5.224.

$y=1+xe^y$. Найти $y''(x)$.

Решение.

1) $y'=(1+xe^y)'$

$y'=1'+x'e^y+x(e^y)'$

$y'=0+1\cdot e^y+xe^y\cdot \underline{y'}$

$y'(1-xe^y)=e^y$

$y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

$$) \ y'' = \left(\frac{e^y}{1-xe^y}\right)' =$$

$$= \frac{(e^y)'(1-xe^y) - e^y(1-xe^y)'}{(1-xe^y)^2} =$$

$$= \frac{e^y \cdot y'(1-xe^y) - e^y(0-1e^y - xe^y y')}{(1-xe^y)^2} =$$

$$= \frac{e^y y'(1-xe^y) + e^y e^y(1+xy')}{(1-xe^y)^2} =$$

$$= e^y \frac{y'(1-xe^y) + e^y + e^y x y'}{(1-xe^y)^2} =$$

$$= e^y \cdot \frac{y' - \cancel{y'xe^y} + e^y + \cancel{y'xe^y}}{(1-xe^y)^2} = e^y \frac{y' + e^y}{(1-xe^y)^2} =$$

Подставим вместо y' выражение из 1):

$$= e^y \frac{\frac{e^y}{1-xe^y} + e^y}{(1-xe^y)^2} = e^y e^y \cdot \frac{\frac{1}{1-xe^y} + 1}{(1-xe^y)^2} =$$

$$= e^{2y} \frac{1+1-xe^y}{(1-xe^y)^3} = \boxed{e^{2y} \frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}}$$

№ 5.225.

$$y = tg(x+y)$$

Решение.

$$1) \ y' = (tg(x+y))'$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (x+y)'$$

$$y' = \frac{1+y'}{\cos^2(x+y)} \quad | \cdot \cos^2(x+y)$$

$$y'\cos^2(x+y) = 1+y'$$

$$y'\left(\cos^2(x+y) - 1\right) = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)-1} = \frac{-1}{\sin^2(x+y)} = -\sin^{-2}(x+y)$$

2) $y'' = -(-2)\sin^{-3}(x+y) \cdot \cos(x+y)\,(x+y)' =$

$= 2\sin^{-3}(x+y)\cos(x+y)(1+y') =$

Подставим вместо y' выражение из 1):

$$= 2\,\frac{\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}\left(1 - \frac{1}{\sin^2(x+y)}\right) = 2\,\frac{\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)} \cdot \frac{\sin^2(x+y)-1}{\sin^2(x+y)} =$$

$$= 2\,\frac{\cos(x+y)\left(-\cos^2(x+y)\right)}{\sin^5(x+y)} = \boxed{-2\,\frac{\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}}$$

ДЗ $\overline{\text{VIII}}$ № 5.223

5.226

Найти производную 2 пор. для функции, заданной параметрически.

$$y''_{xx} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^3}$$

Напоминание. $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

№ 5.230.

$x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Найти y''_{xx}.

$\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ Зам. $\operatorname{cosec} t = \dfrac{1}{\sin t}$.

Решение.

1) $x'(t) = (\cos^{-1} t)' = -\cos^{-2} t (\cos t)' = -\cos^{-2} t(-\sin t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$

$$x''(t) = \frac{(\sin t)'\cos^2 t - \sin t(\cos^2 t)'}{\cos^4 t} =$$

$$= \frac{\cos t \cos^2 t - \sin t \, 2\cos t(-\sin t)}{\cos^4 t} =$$

$$= \frac{\cos^2 t + 2\sin^2 t}{\cos^3 t} = \frac{1 + \sin^2 t}{\cos^3 t}$$

$$y'(t) = (\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y''(t) = (\cos^{-2} t)' = -2\cos^{-3} t (\cos t)' = -2\cos^{-3} t(-\sin t) =$$

$$= \frac{2\sin t}{\cos^3 t}$$

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sin t}{\cos^2 t} & \frac{1}{\cos^2 t} \\ \frac{1+\sin^2 t}{\cos^3 t} & \frac{2\sin t}{\cos^3 t} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}\,\frac{1}{\cos^3 t}\begin{vmatrix} \sin t & 1 \\ 1+\sin^2 t & 2\sin t \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^5 t}\left(2\sin^2 t - (1+\sin^2 t)\right) =$$

$$= \frac{2\sin^2 t - \sin^2 t - 1}{\cos^5 t} = \frac{\sin^2 t - 1}{\cos^5 t} = \frac{-\cos^2 t}{\cos^5 t} = -\frac{1}{\cos^3 t}$$

След.,

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{\cos^3 t}}{\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)^3} = \frac{-\cos^6 t}{\sin^3 t \cdot \cos^3 t} = \boxed{-\operatorname{ctg}^3 t}$$

№ 5.232.

$x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1+t^2)$, $t \in (-\infty; +\infty)$. y''_{xx} – ?

Решение.

1) $x'(t) = \frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1}$

$x''(t) = -(1+t^2)^{-2} \cdot 2t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$

$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$

$y''(t) = 2\,\frac{t'(1+t^2) - t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = 2\,\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} =$

$= 2\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2} & \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ -2t & 2(1-t^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1+t^2)^3}\left(2(1-t^2)+4t^2\right) = \frac{2-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^3} =$$

$$= \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^3}$$

След., $$y''_{xx} = \frac{\frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)^3}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3} = \boxed{2(1+t^2)}$$

ДЗ IX № 5.231, 5.233.

ДЗ X № 5.90 ← !