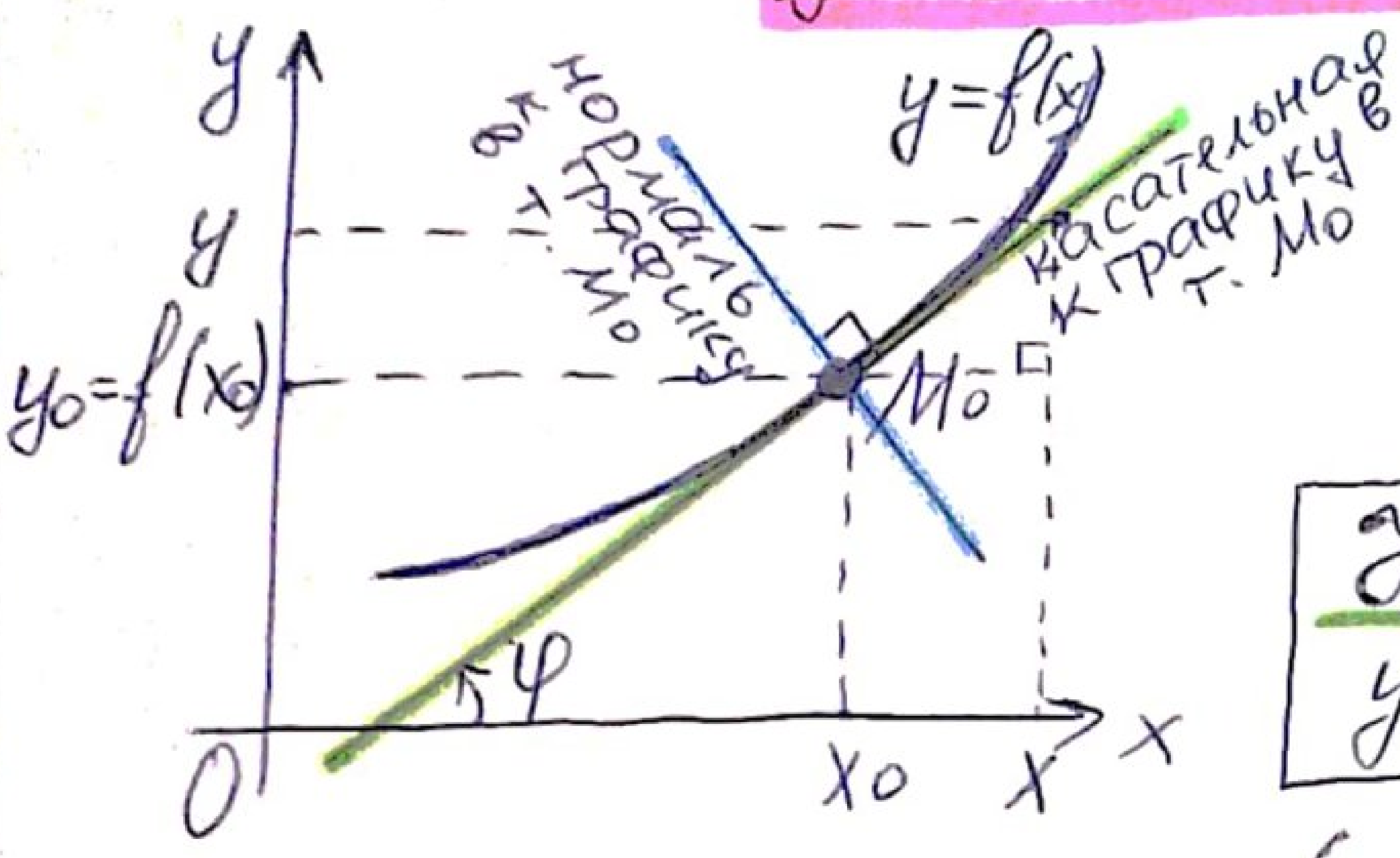
Занятие 15.

Геометрический смысл производной и дифференциала.



$$\boxed{f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi}$$

Уравнение касательной:

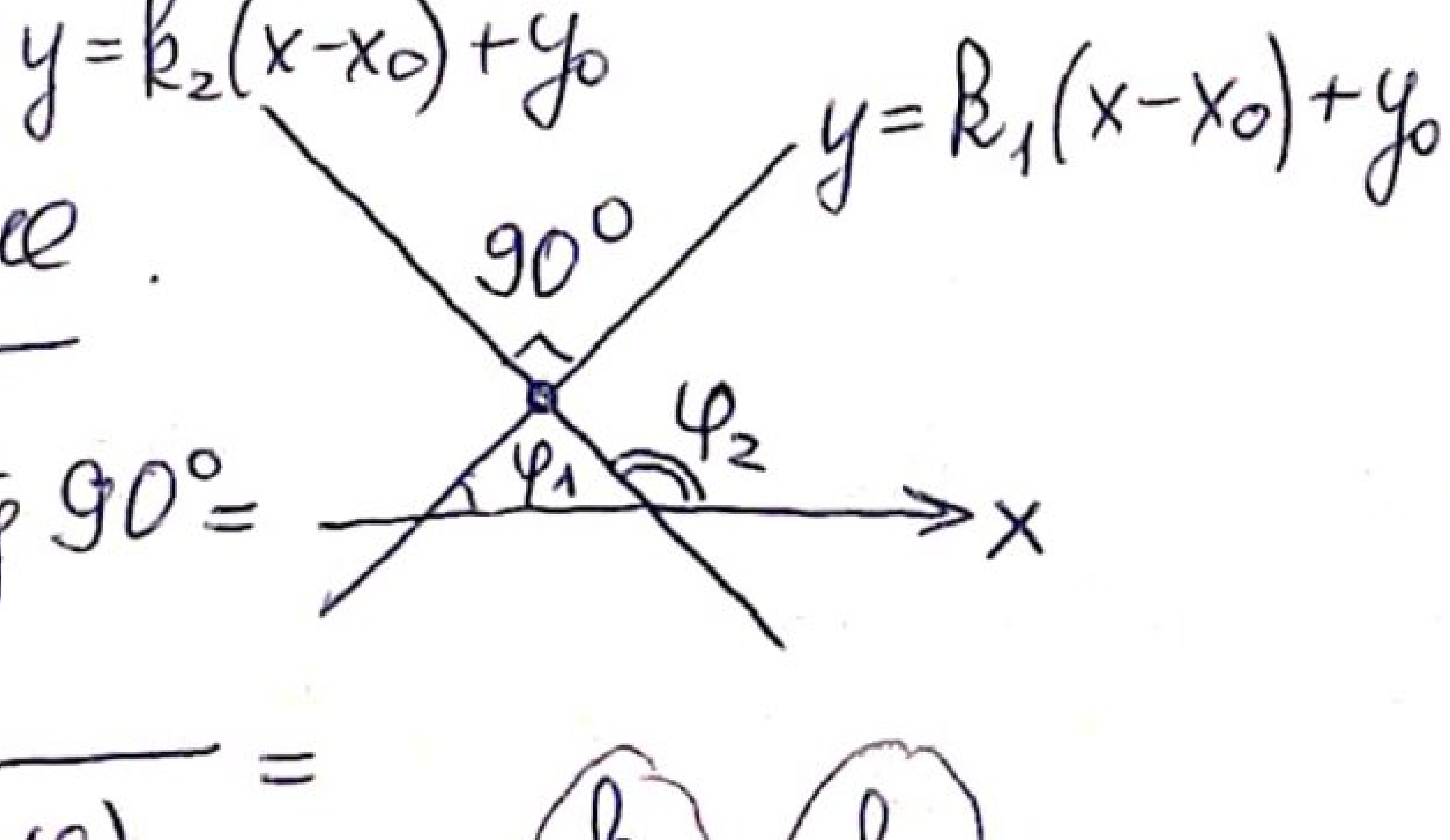
$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0}$$

(т.к. $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\varphi$)

Уравнение нормали:

$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$	, если $f'(x_0)\neq 0$
$x=x_0$	, если $f'(x_0)=0$

Пояснение.



$$\operatorname{ctg}(\varphi_2-\varphi_1)=\operatorname{ctg}90^\circ=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}90^\circ}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}=0 \Leftrightarrow \overset{k_1}{\overset{\parallel}{\operatorname{tg}\varphi_2}}\,\overset{k_2}{\overset{\parallel}{\operatorname{tg}\varphi_1}}+1=0 \Rightarrow \overset{k_2}{\overset{\parallel}{\operatorname{tg}\varphi_2}}=\overset{-\frac{1}{k_1}}{\overset{\parallel}{-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}}}$$

№5.235.

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

Решение.

1) Уравнение касательной: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

уравнение нормали: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

2) $f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = (-1)^2 - 5(-1) + 4 = 1 + 5 + 4 = 10$

$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = 2(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$

3) Подставим 2) в 1), получим

уравнение касательной: $y = -7(x - (-1)) + 10$

$y = -7x - 7 + 10$

$y = -7x + 3$

уравнение нормали:

$y = -\frac{1}{-7}(x - (-1)) + 10$

$y = \frac{1}{7}(x + 1) + 10$

$y = \frac{1}{7}x + 10\frac{1}{7}$

В общем виде ур-е касат: $7x + y - 3 = 0$

ур-е нормали: $x - 7y + 71 = 0$

Ответ: $7x + y - 3 = 0$; $x - 7y + 71 = 0$.

Сканировано с CamScanner

№5.240.

$y=e^{1-x^2}$, $x_0=-1$.

Решение.

1) Ур-е касат: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Ур-е нормали: $y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$

2) $f(x)=e^{1-x^2} \Rightarrow y_0=f(x_0)=e^{1-(-1)^2}=e^{1-1}=e^0=1$

$f'(x)=e^{1-x^2}\cdot(1-x^2)'=e^{1-x^2}\cdot(-2x) \Rightarrow f'(x_0)=e^{1-(-1)^2}\cdot(-2)(-1)=$
$=2$

3) Подст. 2) в 1):

ур-е касат: $y=2(x-(-1))+1$

$y=2x+2+1$

$y=2x+3 \Rightarrow \boxed{2x-y+3=0}$

ур-е нормали:

$y=-\frac{1}{2}(x-(-1))+1$

$y=-\frac{1}{2}(x+1)+1$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x+2y-1=0}$

Ответ: $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$.

$\boxed{\text{ДЗ I. № 5.236, 5.237, 5.238.}}$

Сканировано с CamScanner

№5241

Написать уравнение касательной и нормали в точке $M_0(2,2)$ к кривой, заданной параметрически: $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$, $t\neq 0$

Решение.

1) Найдём $t=t_0$ для точки $M_0(2,2)=(x_0,y_0)$:

$$\begin{cases} 2=\frac{1+t}{t^3} & (1) \\ 2=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t} & (2) \end{cases}$$

Рас. (2). Умн. его на $2t^2$: $4t^2=3+t$

$4t^2-t-3=0$ Это квадр. ур-е.

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Проверим, какое из этих t удовл. ур-ю (1).

$t=1 \Rightarrow 2=\frac{1+1}{1^3}$

$2=2$ верно

$t=-\frac{3}{4} \Rightarrow 2=\frac{1-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}$

$2=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{27}{64}}$ неверно

След, для точки $M_0(x_0,y_0)=(2,2)$ параметр $t=t_0=1$.

Сканировано с CamScanner

Ур-е касат: $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$

Ур-е нормали: $y=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+y_0$,

где $f'(x_0)=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

3) $x'(t)=\left(\frac{1+t}{t^3}\right)'=\left(\frac{1}{t^3}+\frac{t}{t^3}\right)'=\left(t^{-3}+t^{-2}\right)'=-3t^{-4}-2t^{-3}=$

$=\frac{-3}{t^4}-\frac{2}{t^3}$

$x'(t_0)=x'(1)=\frac{-3}{1^4}-\frac{2}{1^3}=-5$

$y'(t)=\left(\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}\right)'=\left(\frac{3}{2}t^{-2}+\frac{1}{2}t^{-1}\right)'=\frac{3}{2}\cdot(-2)t^{-3}+\frac{1}{2}(-1)t^{-2}=$

$=\frac{-3}{t^3}-\frac{1}{2t^2}$

$y'(t_0)=y'(1)=\frac{-3}{1^3}-\frac{1}{2\cdot1^2}=-3-\frac{1}{2}=-3\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$

$f'(x_0)=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{-\frac{7}{2}}{-5}=\frac{7}{10}=0{,}7$

4) Подст. 3) в 2) и учтём, что $x_0=2, y_0=2$:

Ур-е касат: $y=0{,}7(x-2)+2 \quad |\cdot10$

$10y=7x-14+20$

$\boxed{7x-10y+6=0}$

Ур-е нормали: $y=-\frac{1}{0{,}7}(x-2)+2 \quad |\cdot7$

$7y=-10(x-2)+14$

$\boxed{10x+7y-34=0}$

ДЗ II
№5.242.

Ответ: $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$.

№5.243.

Написать уравнение касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением

$$x^3+y^2+2x-6=0$$

в точке с ординатой $y_0=3$.

Решение.

1) Ур-е касат: $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$

Ур-е нормали: $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+y_0$

2) Найдём координаты т. $M_0(x_0,y_0)$.

По усл. $y_0=3$. Найдём x_0 из ур-е кривой:

$$x^3+3^2+2x-6=0$$

$$x^3+2x+3=0$$

$x=-1$, т.к. $(-1)^3+2\cdot(-1)+3=0$ верно

Разложим x^3+2x+3 на множители, один из которых $(x+1)$:

$$\begin{array}{l|l} x^3+0x^2+2x+3 & x+1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2-x+3 \\ \quad -x^2+2x & \\ \quad -\,-x^2-x & \\ \qquad 3x+3 & \\ \qquad -\,3x+3 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

След., $x^3+2x+3=$
$=(x+1)(x^2-x+3)$.

Многочлен x^2-x+3 не расклад. на множители, т.к. его $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot3<0$.

Получим ур-е

$$(x+1)(x^2-x+3)=0$$

и его единств. корень $x=-1$.

След., $M_0(x_0,y_0)=(-1;3)$.

Сканировано с CamScanner

Найдём $f'(x_0)$ из ур-е кривой.

$$(x^3+y^2+2x-6)'_x = 0'_x$$

$$3x^2+2y\cdot y'+2=0$$

$$2y\cdot y' = -3x^2-2$$

$$y' = \frac{-3x^2-2}{2y}$$

$$f'(x_0)=y'(x_0, y_0) = \frac{-3(-1)^2-2}{2\cdot 3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6}$$

4) Подставим 2), 3) в 1):

ур-е касательной: $y = -\frac{5}{6}(x+1)+3 \quad | \cdot 6$

$$6y = -5(x+1)+18$$

$$\boxed{5x+6y-13=0}$$

ур-е нормали: $y = \frac{6}{5}(x+1)+3 \quad | \cdot 5$

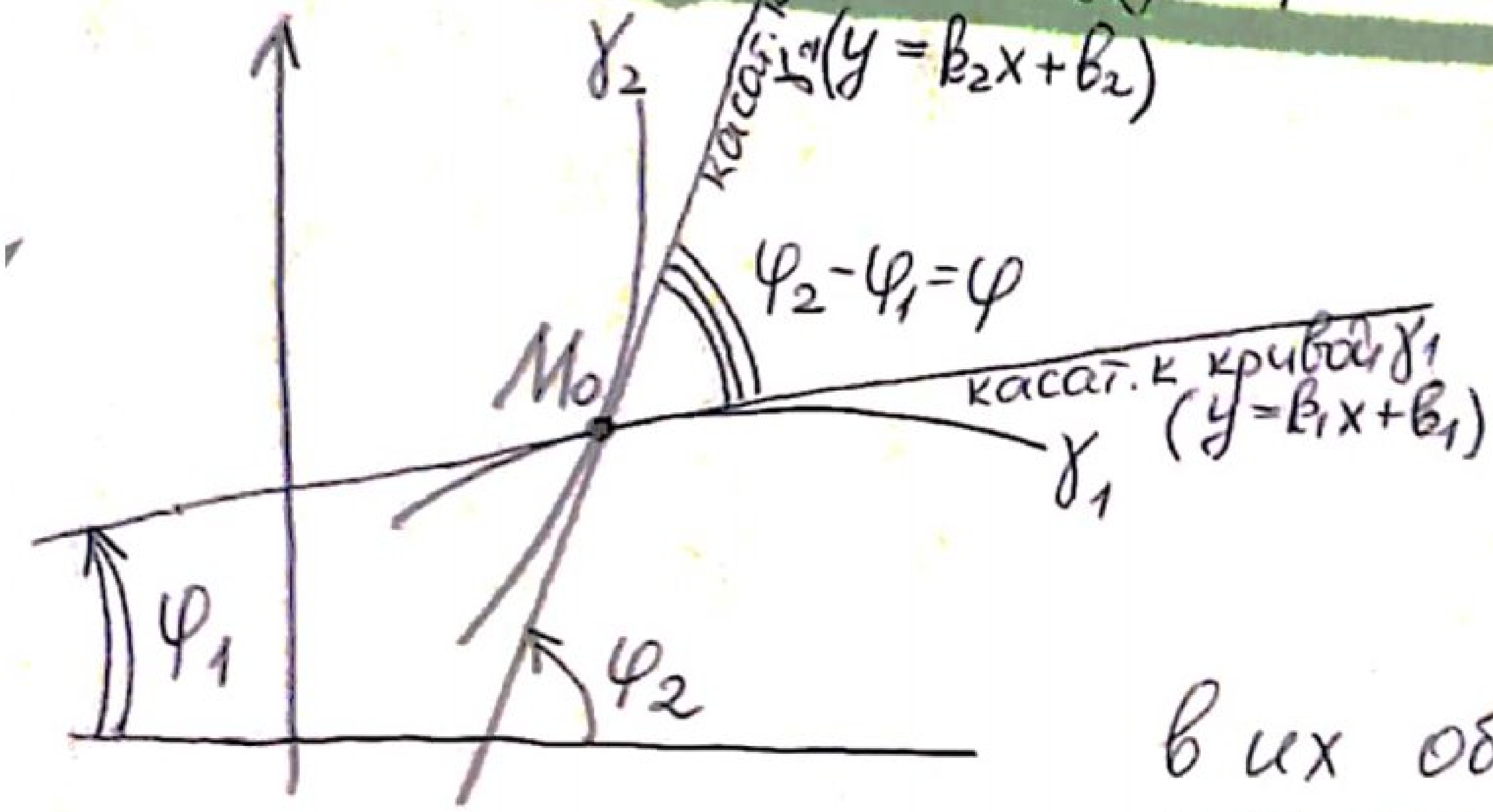
$$5y = 6(x+1)+15$$

$$\boxed{6x-5y+21=0}$$

Ответ: $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$

Д13 III. № 5.244

Углы между кривыми



Углом φ между кривыми γ_1 и γ_2, заданными $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0,y_0)$ наз. угол между касательными к этим кривым в точке M_0

$$tg\varphi = tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1\, tg\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

Если $k_1k_2=-1$, то $\varphi=90^\circ$

Если $k_1k_2\neq-1$, то для острого угла φ

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{y_2'(x_0)-y_1'(x_0)}{1+y_1'(x_0)y_2'(x_0)}\right|.$$

№5.256.

Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые:

$$y=\sin x \text{ и } y=\cos x,\quad x\in[0,2\pi]$$

Решение.

1) Найдём точки пересечения кривых

$\sin x=\cos x$

$\sin x-\cos x=0 \quad | \cdot \frac{\sqrt2}{2}$

$\frac{\sqrt2}{2}\sin x-\frac{\sqrt2}{2}\cos x$

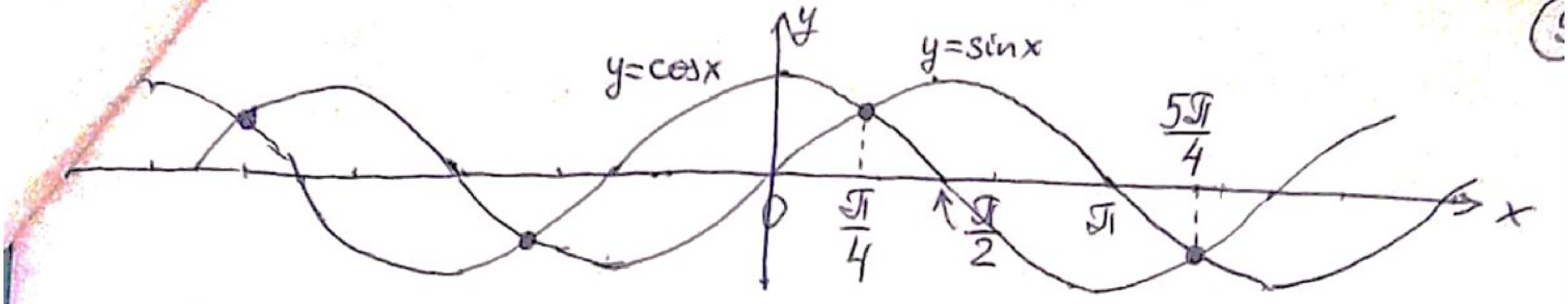
$\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=0$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$x-\frac{\pi}{4}=\pi n$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z}$

Сканировано с CamScanner



$$x_0^{M_1}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y_0^{M_1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_0^{M_2}=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow y_0^{M_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_2\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2) Напишем ур-я касательных к кривым $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$ в точках M_1 и M_2.

Для $y_1=\sin x$

$$y_1'=\cos x$$

$$y_1'(x_0^{M_1})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1'(x_0^{M_2})=\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Для $y_2=\cos x$

$$y_2'=-\sin x$$

$$y_2'(x_0^{M_1})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2'(x_0^{M_2})=\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) В точке M_1: $\operatorname{tg}\varphi^{M_1}=\left|\dfrac{y_2'(x_0^{M_1})-y_1'(x_0^{M_1})}{1+y_1'(x_0^{M_1})\,y_2'(x_0^{M_1})}\right|$

$$=\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right|=\frac{\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{1-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow$$

Д/З IV №5.255.

$$\Rightarrow \varphi^{M_1}=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$$

В точке M_2: $\operatorname{tg}\varphi^{M_2}=\left|\dfrac{y_2'(x_0^{M_2})-y_1'(x_0^{M_2})}{1+y_1'(x_0^{M_2})\,y_2'(x_0^{M_2})}\right|=$

$$=\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right|=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^{M_2}=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}.$$

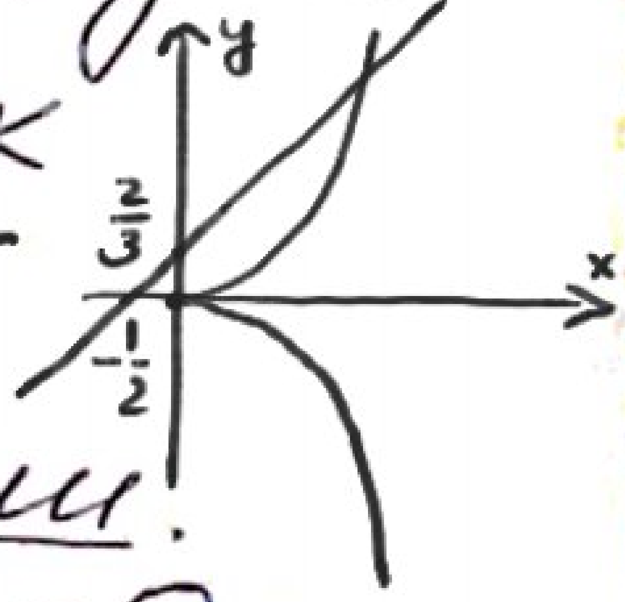
Ответ. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$.

Сканировано с CamScanner

Более простые задачи про углы

№5.246 | ДЗ: №5.245, 5.249, 5.250

В какой точке $M_0(x_0, y_0)$ кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x - 3y + 2 = 0$.



I способ

Напоминание из анал. геометрии:

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ перпендикулярны $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Решение.

1) Напишем ур-е касательной к данной кривой.

$$y^2 - 2x^3 = 0$$
$$(y^2 - 2x^3)'_x = 0'_x$$
$$2y \cdot y' - 6x^2 = 0 \quad | : 2$$
$$y \cdot y' = 3x^2 \quad | : y \neq 0$$
$$y' = \frac{3x^2}{y}$$

В т. $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, $y'(M_0) = \frac{3x_0^2}{y_0}$, где x_0 и y_0 связаны уравнением кривой: $y_0^2 = 2x_0^3$.

3) Ур-е касат. в т. M_0:

$$y = y'(M_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$
$$\underbrace{y'(M_0)}_{A_1} x \underbrace{-1}_{B_1} \cdot y + y_0 - y'(M_0) = 0$$

След., для ур-я касательной $\{A_1, B_1\} = \{y'(M_0), -1\} =$

Сканировано с CamScanner

$$= \left\{ \frac{3x_0^2}{y_0}, -1 \right\}$$

Для прямой $4x - 3y + 2 = 0$

$$\{A_2, B_2\} = \{4, -3\}.$$

4) Условие $\perp$-ти $2^х$ прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$$\frac{3x_0^2}{y_0} \cdot 4 + (-1)\cdot(-3) = 0$$

$$\frac{12x_0^2}{y_0} + 3 = 0 \quad | \cdot y_0$$

$$12x_0^2 + 3y_0 = 0 \quad | : 3$$

$$4x_0^2 + y_0 = 0$$

5) Решим систему

$$\begin{cases} 4x_0^2 + y_0 = 0 & (1) \\ y_0^2 = 2x_0^3 & (2) \end{cases}$$

Пояснение

В окрест. $O(0,0)$ $\exists$ не одна, а две ф-ции $y = \pm\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Для $\boxed{\text{них}}$ $\exists\, y' = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$;

$y'(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ горизонт. касат.

Горизонт. касат. $\not\perp$ данной прямой.

Из (1): $y_0 = -4x_0^2$. Подставим в (2):

$$(-4x_0^2)^2 = 2x_0^3$$

$$16x_0^4 = 2x_0^3 \quad | : 2$$

$$x_0^3(8x_0 - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{1}{8} \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow y_0 = 0 \\ \Rightarrow y_0 = -4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{-\cancel{4}\cdot 1}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot 8} = -\frac{1}{16} \end{array}$$

не подх., т.к. в этой точке $\nexists\, y'(M_0) \overset{\text{кот.}}{=} \frac{3x_0^2}{y_0}$.

Получим точку

$$M_0(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$.

Сканировано с CamScanner

№ 5.246. (11')

II способ.

Исп. ф-лу: прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны $\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

1) Найдём k_1 для касательной и k_2 для прямой.

Для касательной: $k_1=tg\varphi_1=f'(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $\underbrace{y^2-2x^3}_{F(x,y)}=0$.

На плоскости $\exists\ U(O)$, в которой данная кривая задает ф-ю $y=f(x)$. В $U(O)$ $\exists$ 2 ф-ции $y_{1,2}=\pm\sqrt{2}x^{3/2}$.

Дифф. ур-е по x: $F'_x(x,y)=0'_x$

$(y^2-2x^3)'_x=0'_x$

$2y\cdot y'_x-6x^2=0 \quad |:2$

$y\cdot y'_x=3x^2 \quad |:y\neq0$

$y'_x=\dfrac{3x^2}{y}$ для $y\neq0$ в т. $M_0(x_0,y_0)$, $y_0\neq0$,

В т. $x=0$ ($\Rightarrow$ в т. $O(0,0)$) для $y'_{1,2}(0)$ нельзя исп. формулу

$k_1=y'_x(M_0)=\dfrac{3x_0^2}{y_0}$

Для прямой $k_2=tg\varphi_2$.

Выразим y через x из ур-е прямой.

$3y=4x+2 \Rightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3} \Rightarrow k_2=\dfrac{4}{3}$.

11''

2) Решим ур-е $\begin{cases} k_1 k_2 = -1 \\ M_0(x_0, y_0) \in \text{кривой}, \text{ но } M_0 \neq O \end{cases}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\cancel{3}x_0^2}{y_0} \cdot \dfrac{4}{\cancel{3}} = -1 \\ y_0^2 = 2x_0^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_0^2 = y_0 & (1) \\ y_0^2 = 2x_0^3 & (2) \end{cases}$$

Подст. (1) в (2):

$$16x_0^4 = 2x_0^3 \quad /:2$$

$$8x_0^4 = x_0^3$$

$$8x_0^3\left(x_0 - \frac{1}{8}\right) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} x_0 &= 0 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 &= \frac{1}{8} \Rightarrow y_0 = -4\left(\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{1}{16} \end{aligned}\right.$$

$M_0(0;0)$ не подх., т.к $M_0 \neq O$. В этой точке $\nexists\, y' = f'(x)$, т.к. $\nexists\, y = f(x)$, однако для $y_{1,2} = f_{1,2}(x)$ $\exists\, f'_{1,2}(0) = 0 \Rightarrow$ прямая $y=0$ явл. касат., но она $\not\perp$ прямой $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

и $M_0\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$

III сп Выразим $y = \pm\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{x} = k_1$

Решим $k_1 k_2 = -1$, т.е. $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}\cdot\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{1}{16}$.

Дифференциал функции

Функция $f(x)$ наз. дифференцируемой в т. x_0, если её приращение $\Delta f(x_0,\Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0,\Delta x) = \underbrace{A\Delta x}_{} + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0$$

главная линейная (отн. Δx) часть приращения наз. дифференциалом ф-ции в т. x_0. Обозн. $df(x_0,\Delta x)$.

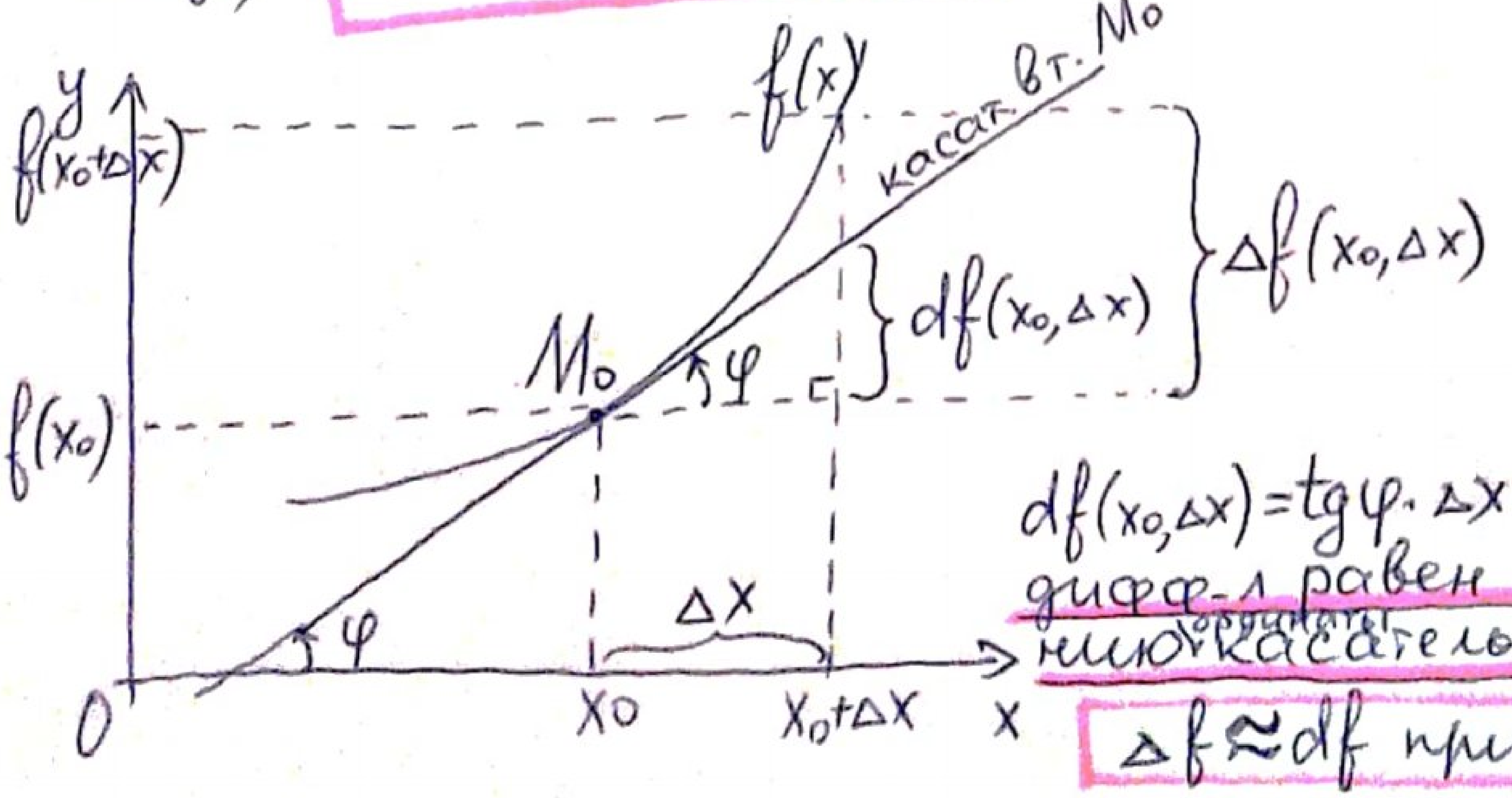
След., $\Delta f(x_0,\Delta x) = df(x_0,\Delta x) + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Т-ма. Ф-я $f(x)$ дифф. в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists$ производная $f'(x_0)$, причём $A = f'(x_0)$.

Зам. Для ф-ции $f(x) = x$ $\quad \Delta f = \Delta x$ $\quad df$ $\quad dx = \Delta x$, т.е.

Поэтому дифференциал переменной = приращению этой переменной

След., $\boxed{df(x_0,\Delta x) = f'(x_0)\,dx}$.



$df(x_0,\Delta x) = tg\varphi \cdot \Delta x$, т.е. дифф-л равен приращению ординаты касательной в т. x_0

$\boxed{\Delta f \approx df \text{ при } \Delta x \to 0.}$

Свойства дифференциала

1) $dC = 0$, где C — постоянная
2) $d(C_1 u + C_2 v) = C_1 du + C_2 dv$
3) $d(uv) = (du)v + u(dv)$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(du)v - u(dv)}{v^2}$

Инвариантность формы записи 1-го дифференциала

$z(x) = z(y(x))$ — сложная ф-я

$$\Downarrow$$

$$dz(x, dx) = z'(x)\,dx = \underbrace{z'(y)\cdot \overbrace{y'(x)\,dx}^{dy}}_{z'(x)} =$$

$$dz(y, dy) = z'(y)\,dy =$$

одинак. форма записи dz для перем. x и промежуточной перем. y.

Эквивалентность приращения функции и дифференциала ф-ции

$$\Delta f = df + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Напоминание. $f \underset{(\Delta x \to 0)}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f}{g} = 1$

Сл. $\Delta f \sim df$ при $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow df \neq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \neq 0$

Пример

$f(x) = \cos x$, $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$
$= \cos(0 + \Delta x) - \cos 0 = \cos(\Delta x) - 1$

$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x = -\sin 0 \cdot \Delta x = 0 \cdot \Delta x = 0$

$\Delta f(x_0, \Delta x) \not\sim df(x_0, \Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\cos(\Delta x) - 1 \not\sim 0$ при $\Delta x \to 0$

Действительно, $\cos(\Delta x) - 1 \sim -\frac{(\Delta x)^2}{2}$ при $\Delta x \to 0$

№5.277.

Найти приращение ф-ции и дифференциал функции $y=x^3$, соответствующие $x_0=2$ и приращениям $\Delta x=0{,}1$, $\Delta x=0{,}01$.

Решение.

Для $\Delta x=0{,}1$.

1) Приращение функции:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=$$

$$=(2+0{,}1)^3-2^3=9{,}261-8\approx\boxed{1{,}261}$$

2) Дифференциал функции:

$$df(x_0,\Delta x)=f'(x_0)\Delta x=12\cdot 0{,}1=\boxed{1{,}2}$$

$$f'(x)=(x^3)'=3x^2\Rightarrow f'(x_0)=3\cdot 2^2=12$$

Для $\Delta x=0{,}01$.

1) Приращение функции:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=(2+0{,}01)^3-2^3=8{,}1206-8=\boxed{0{,}1206}$$

2) Дифференциал функции:

$$df(x_0,\Delta x)=12\cdot 0{,}01=\boxed{0{,}12}$$

<u>Зам.</u> Сравним $\Delta f(x_0,\Delta x)$ и $df(x_0,\Delta x)$: чем меньше Δx, тем точнее вып. рав-во

$$\boxed{\Delta f(x_0,\Delta x)\approx df(x_0,\Delta x).}$$

№ 5.281.

Для функций а) $f(x)=x^n$ и б) $\varphi(x)=\sin x$ найти значения аргумента x, при которых <u>дифференциалы этих ф-ций $df(x_0,\Delta x)$</u> <u>не эквивалентны приращениям</u> <u>этих ф-ций $\Delta f(x_0,\Delta x)$</u>.

Решение

а) Для $f(x)=x^n$

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

$$f'(x_0)=nx_0^{n-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=0$$

б) Для $\varphi(x)=\sin x$

$$\varphi'(x)=\cos x$$

$$\varphi'(x_0)=\cos x_0=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

Ответ: 0; $\frac{\pi}{2}+\pi n$.

<u>Пояснение</u>. При $f'(x_0)=0 \Rightarrow df(x_0,\Delta x)=0$

(см. также с.13 внизу)

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=\underset{(\text{ноль})}{0}+o(\Delta x)=o(\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{df(x_0,\Delta x)}\neq 1$$

$df(x_0,\Delta x)$ не явл. гл. частью $\Delta f(x_0,\Delta x)$

и $\Delta f(x_0,\Delta x)\not\sim df(x_0,\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$.

(не эквивалентны)

<u>Следствие</u>. Если в т. x_0 график функции $f(x)$

① имеет наклонную касательную ($y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$, где $f'(x_0)\neq 0$), то $\Delta f(x_0,\Delta x)\sim df(x_0,\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$

$\underbrace{\Delta f(x_0,\Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}\sim f'(x_0)\Delta x$

② имеет горизонтальную касательную ($y=f(x_0)$, т. к. $f'(x_0)=0$), то $\Delta f(x_0,\Delta x)\not\sim df(x_0,\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$

$\underbrace{\Delta f(x_0,\Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}\neq 0$

№5.285.

Найти дифференциал функции $y=f(x)$ для произвольных x и их приращений $\Delta x = dx$.

$$f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5.$$

Решение.

$$df(x,\Delta x) = f'(x)\Delta x \overset{\text{т.е}}{=} f'(x)dx$$

Найдём

$$f'(x) = x'\sqrt{a^2-x^2} + x(\sqrt{a^2-x^2})' + a^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' - 5' =$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left(\frac{x}{a}\right)' - 0 =$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{a}} =$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a\cdot a}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2-x^2} + \frac{\cancel{a^2-x^2}^{\sqrt{a^2-x^2}}}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

Подставим в дифференциал:

$$df(x,\Delta x) = 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Ответ: $2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

№ 5.287.

$f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2}$ $\qquad df - ?$

Решение.

$f'(x) = x'\,\mathrm{arctg}\,x + x(\mathrm{arctg}\,x)' - (\ln\sqrt{1+x^2})' =$

$= \mathrm{arctg}\,x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(\sqrt{1+x^2})' =$

$= \mathrm{arctg}\,x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} =$

$= \mathrm{arctg}\,x + \cancel{\frac{x}{1+x^2}} - \cancel{\frac{x}{1+x^2}} = \mathrm{arctg}\,x$

След., $df = f'(x)dx = \boxed{\mathrm{arctg}\,x\,dx}$

№ 5.288.

$f(x) = x\ln x - x + 1$ $\qquad df - ?$

Решение.

$f'(x) = x'\ln x + x(\ln x)' - x' + 1' =$

$= \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

След., $df = f'(x)dx = \boxed{\ln x\,dx}$

Д/З VI № 5.286, 5.289.

Сканировано с CamScanner

№ 5.290.

Найти дифференциал функции, заданной неявно уравнением

$$y^5 + y - x^2 = 1.$$

Решение. I сп.

Найдём дифференциал левой и правой части, считая $y = y(x)$, и выразим dy:

$$d(y^5+y-x^2) = d1$$

$$5y^4 dy + dy - 2x\,dx = 0$$

$$(5y^4+1)\,dy = 2x\,dx$$

$$\boxed{dy = \frac{2x}{5y^4+1}\,dx}$$

это $f'(x)$.

Обозначение для производной: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Ответ: $dy = \frac{2x}{5y^4+1}dx$.

II сп.

1) Найдём производную левой и правой части, считая $y = y(x)$, и выразим y'!

Можно писать y'_x.

$$(y^5+y-x^2)' = 1'$$

$$5y^4 \cdot y' + y' - 2x = 0$$

$$(5y^4+1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{5y^4+1}$$

2) $dy = y'dx = \frac{2x}{5y^4+1}dx$.

Сканировано с CamScanner

№ 5.292.

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\qquad dy-?$

Решение.

$d\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=d\,a^{\frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy=0 \qquad |:\frac{2}{3}$

$\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}=0$

$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}=-\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$

$dy=\frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $\qquad$ Ответ: $dy=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,dx$

№ 5.294.

$y=x+\operatorname{arctg} y$ $\qquad dy-?$

Решение.

$dy=d(x+\operatorname{arctg} y)$

$dy=dx+d(\operatorname{arctg} y)$

$dy=dx+\frac{1}{1+y^2}dy$

$dy\left(\frac{1}{1+y^2}-\overset{1+y^2}{1}\right)=-dx$

$dy\,\frac{-y^2}{1+y^2}=-dx$

$dy=\frac{1+y^2}{y^2}dx$ $\qquad$ Ответ: $dy=\frac{y^2+1}{y^2}dx.$

Сканировано с CamScanner

№ 5.297.

$\cos(xy) = x$ $\qquad$ $dy - ?$

Решение.

$d(\cos(xy)) = dx$

$-\sin(xy)\, d(xy) = dx$

$-\sin xy(dx \cdot y + x\,dy) = dx$

$-y \sin xy\, \underline{dx} - x \sin xy\, dy = \underline{dx}$

$(-y \sin xy - 1)\, dx = x \sin xy\, dy$

$dy = -\dfrac{y \sin xy + 1}{x \sin xy}\, dx$

$\boxed{\text{Д/З } \overline{\underline{\text{VII}}} \text{ № } 5.291,\ 5.295,\ 5.296.}$

Сканировано с CamScanner

Приближенные вычисления

$$\Delta y \approx dy \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

№ 5.298.

Вычислить приближенно

а) $\arcsin 0{,}05$; в) $\ln 1{,}2$.

Решение. $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

а) Рас. функцию $f(x)=\arcsin x$.

Выберем $x_0=0 \Rightarrow \Delta x = 0{,}05$.

Надо найти $f(x_0+\Delta x)=\arcsin(0+0{,}05)=$
$=\arcsin 0{,}05$.

Для этого найдём

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0)=\arcsin 0 = 0 \\ f'(x)=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)+f'(x_0)\Delta x = 0+1\cdot 0{,}05 = 0{,}05.$$

След., $\boxed{\arcsin 0{,}05 \approx 0{,}05.}$

Сканировано с CamScanner

Рас. функцию $f(x) = \ln x$

Выберем $x_0 = 1 \Rightarrow \Delta x = 0{,}2$

Надо найти $f(x_0 + \Delta x) = \ln 1{,}2$.

Для этого найдём

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$$

След., $\boxed{\ln 1{,}2 \approx 0{,}2}$

Ответ: 0,05 ; 0,2.

№ 5.300

$f(x) = e^{x^2 - x}$. Найти приближенно $f(1{,}2)$.

Д/З VIII
№ 5.298 (б)
№ 5.299

Решение. $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$

$x_0 = 1 \Rightarrow \Delta x = 0{,}2$

Найдём $f(x_0 + \Delta x) = f(1{,}2)$

Найдём

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = e^{1^2 - 1} = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^{x^2 - x} \cdot (2x - 1) \\ f'(x_0) = e^{1^2 - 1} \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 1 + 1 \cdot 0{,}2 = 1{,}2$$

След., $f(1{,}2) \approx 1{,}2$ Ответ: 1,2.

Сканировано с CamScanner