Занятие 17 (занятие 16 – это КР)

Правило Бернулли-Лопиталя раскрытия неопределённостей $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пусть

1) $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$
3) $\beta'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
2) $\alpha(x), \beta(x)$ – дифф. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$

1) $A(x), B(x)$ – б.б.ф. при $x \to x_0$
3) $B'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
2) $A(x), B(x)$ – дифф. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{A'(x)}{B'(x)}$

Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \quad \Big| \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A'(x)}{B'(x)}$$

Зам. Верно при $x_0 = \pm\infty$.

№5.329.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos 2x))'}{(\sin 2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot \cancel{2}}{\cos 2x \cdot \cancel{2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} =$$

$$= -\frac{\sin(2\cdot 0)}{\cos^2(2\cdot 0)} = -\frac{0}{1^2} = \boxed{0}$$

№5.330

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}}{(1+x^2)3\cancel{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+0^2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

№5.332

I сп. Правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(a^x-b^x)'}{(c^x-d^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{c^x\ln c-d^x\ln d}=\frac{a^0\ln a-b^0\ln b}{c^0\ln c-d^0\ln d}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$$

II сп. Исп. эквивалентности $a^x-1\sim x\cdot\ln a$ при $x\to0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{b^x\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right)}{d^x\left(\left(\frac{c}{d}\right)^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{b^x\cdot\cancel{x}\cdot\ln\frac{a}{b}}{d^x\,\cancel{x}\ln\frac{c}{d}}=\frac{b^0\ln\frac{a}{b}}{d^0\ln\frac{c}{d}}=$$

$$=\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}=\boxed{\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}}$$ тот же ответ.

№5.334

I сп. Исп. эквивалентности

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}e^{2x}-1\sim2x\\ \arcsin3x\sim3x\end{matrix}\ \text{при } x\to0\right]=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{2}{3}$$

II сп. Правило Лопиталя

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)'}{(\arcsin3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\cdot2}{\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}e^{2x}\sqrt{1-(3x)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}e^0\sqrt{1-0^2}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

№ 5.336

I сп. Правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\ln(\cos ax))'}{(\ln(\cos bx))'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos ax}\cdot(-\sin ax)\cdot a}{\frac{1}{\cos bx}\cdot(-\sin bx)\cdot b}=\frac{a}{b}\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}ax}{\operatorname{tg}bx}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{tg}ax)'}{(\operatorname{tg}bx)'}=\frac{a}{b}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2ax}\cdot a}{\frac{1}{\cos^2bx}\cdot b}=\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to0}\frac{\cos^2bx}{\cos^2ax}=$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\frac{\cos^2 0}{\cos^2 0}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{1}=\boxed{\frac{a^2}{b^2}}$$

II сп. Исп. эквивалентных ф-ций: $\left[\ln(1+x)\sim x \text{ при } x\to0\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos ax-1))}{\ln(1+(\cos bx-1))}=\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\left[\begin{matrix}\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}\\ \text{при } x\to0\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{(ax)^2}{2}}{-\frac{(bx)^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{a^2}{b^2}=\boxed{\frac{a^2}{b^2}}$$

№ 5.340

I сп.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\ln(1+x))'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to0}(1+x)(e^x+e^{-x})=(1+0)(e^0+e^0)=\boxed{2}$$

II сп.

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\ln(1+x)}=\left[\begin{matrix}e^{2x}-1\sim2x \text{ при } x\to0\\ \ln(1+x)\sim x\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\cdot2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2\cdot e^0=\boxed{2}$$

ДЗ: № 5.331, 5.333, № 5.335, 5.337, 5.341.

№5.342

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{ctg}x-1)'}{(\sin 4x)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\cos 4x\cdot 4} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x\cos 4x} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}\cos\pi} = \frac{-1}{4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot(-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

№5.344

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^m)'} =$$

$(m>0)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{m\cdot x^{m-1}} = \frac{1}{m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^m} = \frac{1}{m}\cdot 0 = \boxed{0}$$

Д/З II №5.343

№ 5.347.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{\cos x\cdot \ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}=\lim_{x\to 3+0}\cos x\ \underbrace{\lim_{x\to 3+0}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=$$

$$=\cos 3\cdot\lim_{x\to 3+0}\frac{(\ln(x-3))'}{(\ln(e^x-e^3))'}=$$

$$=\cos 3\lim_{x\to 3+0}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{e^x-e^3}\cdot e^x}=\cos 3\underbrace{\lim_{x\to 3+0}\frac{e^x-e^3}{(x-3)e^x}}_{\left[\frac{0}{0}\right]}=$$

$$=\cos 3\cdot\lim_{x\to 3+0}\frac{(e^x-e^3)'}{((x-3)e^x)'}=$$

$$=\cos 3\cdot\lim_{x\to 3+0}\frac{\cancel{e^x}}{1\cdot e^x+(x-3)\cancel{e^x}}=\cos 3\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-2}=$$

$$=\cos 3\cdot\frac{1}{3-2}=\boxed{\cos 3}$$

Мы представили предел произведения как произведение пределов и во втором из них применили правило Лопиталя.

№5.348.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left[\frac{-\infty+(+\infty)}{-\infty}\right]=$$

Здесь неопределённость есть в числителе. Рас. сумму пределов, док-м, что они $\exists$ (вычислим их). След, наше решение обосновано.

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}+\lim_{x\to1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]+\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{(\ln(1-x))'}{(\operatorname{ctg}\pi x)'}+\lim_{x\to1-0}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)'}{(\operatorname{ctg}\pi x)'}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{\frac{-1}{\sin^2\pi x}\cdot\pi}+\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\cancel{\frac{\pi}{2}}}{-\frac{1}{\sin^2\pi x}\cdot\cancel{\pi}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{\sin^2\pi x}{1-x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to1-0}\frac{\sin^2\pi x}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]-\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{(\sin^2\pi x)'}{(1-x)'}-\frac{1}{2}\lim_{x\to1-0}\frac{(\sin^2\pi x)'}{\left(\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\cancel{\frac{1}{\pi}}\lim_{x\to1-0}\frac{2\sin\pi x\cos\pi x\cdot\cancel{\pi}}{-1}-\cancel{\frac{1}{2}}\lim_{x\to1-0}\frac{2\sin\pi x\cos\pi x\cdot\cancel{\pi}}{2\cos\frac{\pi x}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\cancel{\frac{\pi}{2}}}=$$

$$=-\lim_{x\to1-0}\sin2\pi x+\underbrace{\lim_{x\to1-0}\frac{\sin2\pi x}{\sin\pi x}}_{\left[\frac{0}{0}\right]}=$$

$$= -\sin(2\pi\cdot 1) + \lim_{x\to 1-0}\frac{(\sin 2\pi x)'}{(\sin \pi x)'} =$$

$$= 0 + \lim_{x\to 1-0}\frac{\cos 2\pi x\cdot 2\cancel{\pi}}{\cos \pi x\cdot \cancel{\pi}} = 2\lim_{x\to 1-0}\frac{\cos 2\pi x}{\cos \pi x} =$$

$$= 2\frac{\cos(2\pi\cdot 1)}{\cos(\pi\cdot 1)} = 2\frac{\cos 2\pi}{\cos \pi} = 2\cdot\frac{-1}{1} = \boxed{-2}$$

Д/З III № 5.345, 5.346

Раскрытие неопределённостей $[0\cdot\infty]$

Пусть $\alpha(x)$ – б.м. ф-я при $x \to x_0$
$A(x)$ – б.б. ф-я при $x \to x_0$

Тогда запишем

$$\alpha(x)A(x) = \frac{\alpha(x)}{\frac{1}{A(x)}}$$, получим

вместо $[0\cdot\infty]$ неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$,

или $$\alpha(x)A(x) = \frac{A(x)}{\frac{1}{\alpha(x)}}$$, получим

вместо $[0\cdot\infty]$ неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

№5.352.

$$\lim_{x\to 0} x\ln^3 x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^3}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{((\ln x)^3)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -3\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 =$$

$$= [0\cdot\infty] = -3\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -3\lim_{x\to 0}\frac{((\ln x)^2)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= -3\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 6\lim_{x\to 0} x\ln x = [0\cdot\infty] =$$

$$= 6\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 6\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -6\lim_{x\to 0} x = -6\cdot 0 = \boxed{0}$$

№5.353

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\,tg\frac{x}{2}=[0\cdot\infty] \ominus$$

I сп. Исп. эквивалентных ф-ций

$$\ominus\left[\begin{array}{l} x-\pi=t \Rightarrow x=t+\pi \\ x\to\pi \ \to t\to 0 \\ tg\frac{x}{2}=tg\frac{t+\pi}{2}=tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-ctg\frac{t}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}(-t)\left(-ctg\frac{t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\frac{t}{2}}=\left[tg\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2} \text{ при } t\to 0\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}2=\boxed{2}$$

II сп. Правило Лопиталя

$$\ominus\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{ctg\frac{x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)'}{\left(ctg\frac{x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=2\lim_{x\to\pi}\sin^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{\pi}{2}=2\cdot 1^2=\boxed{2}$$

№ 5.354.

$$\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\,\mathrm{ctg}\,x = [0\cdot\infty] \ominus$$

I сп. Исп. эквивал. ф-ций

$$\ominus \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+e^{-x}-1}{\mathrm{tg}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\mathrm{tg}\,x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\mathrm{tg}\,x} =$$

[$e^x-1\sim x$ и $e^{-x}-1\sim -x$ при $x\to 0$]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{(-x)}{x} = \lim_{x\to 0}1 + \lim_{x\to 0}(-1) = 1-1 = \boxed{0}$$

II сп. Правило Лопиталя

$$\ominus \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\mathrm{tg}\,x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(\mathrm{tg}\,x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\cos^2 x\,(e^x-e^{-x}) =$$

$$= \cos^2 0\cdot(e^0-e^{-0}) = 1\cdot(1-1) = 1\cdot 0 = \boxed{0}.$$

№ 5.358.

$$\lim_{x\to 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1) = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 1+0} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 1+0} \frac{x\ln^2 x}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} x \cdot \underbrace{\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln^2 x}{x-1}}_{\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$= 1\cdot \lim_{x\to 1+0} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln x}{x} = 2\cdot\frac{\ln 1}{1} = 2\cdot 0 = \boxed{0}$$

Д/З IV № 5.349, 5.351, 5.355, 5.356.

Раскрытие неопределённости $[\infty-\infty]$

Преобразуем
$$A(x)-B(x)=A(x)\left(1-\frac{B(x)}{A(x)}\right)$$
, где $A(x), B(x)$ – беск. большие при $x\to x_0$

<u>1сл.</u> $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{B(x)}{A(x)}=C\neq 1$

Тогда
$$\lim_{x\to x_0}(A(x)-B(x))=\lim_{x\to x_0}\underbrace{A(x)}_{\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{B(x)}{A(x)}\right)}_{\to 1-C\neq 0}=\infty$$

<u>2сл.</u> $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{B(x)}{A(x)}=C=1$

Тогда
$$\lim_{x\to x_0}(A(x)-B(x))=\lim_{x\to x_0}\underbrace{A(x)}_{\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{B(x)}{A(x)}\right)}_{\to 0}$$
. Мы получим неопределённость $[\infty\cdot 0]$, которую рассматривали ранее.

См. разобранные примеры в задачнике,

очень полезно :)

№5.363.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)=[\infty-\infty]=\left[ctg^2x=\frac{1}{\sin^2x}-1\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}+1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right)+\lim_{x\to 0}1 \boxed{=} -\frac{1}{3}+1=\boxed{=\frac{2}{3}}$$

Ответ!

Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right)\Leftrightarrow$

Обсуждение. Этот предел можно найти так: привести к общему знаменателю дроби, получим $\left[\frac{0}{0}\right]$, исп. эквивалентность $\sin x\sim x$ при $x\to 0$ затем трижды применить правило Лопиталя. Но попробуем новый способ:

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\infty}\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{\sin^2x}\right)}_{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{\sin^2x}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin^2x}\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2x\sin^2x-x^2 2\sin x\cos x}{\sin^4x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{\sin^3x}=[\sin x\sim x \text{ при } x\to 0]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}+x(-\sin x)-\cancel{\cos x}}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=$$

$$=\left[\begin{matrix}\sin x\sim x\\ \text{при } x\to 0\end{matrix}\right]=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\boxed{-\frac{1}{3}}.$$

№ 5.360.

Но! не надо усложнять, если есть более простой способ (обоснованный!)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=$$

Обсуждение 1. Преобразование $\frac{1}{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x}=$
$=\frac{1}{\operatorname{arctg}x}\left(1-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\frac{1-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}}{\operatorname{arctg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]$,
а затем использование эквивалентности $\boxed{\operatorname{arctg}x\sim x \text{ при } x\to 0}$ и правила Лопиталя приводит к сложным вычислениям.

Будем делать по-другому:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x\operatorname{arctg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{(1+x^2)2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1+0^2}=\frac{1}{2}\cdot 0=\boxed{0}$$

Обсуждение 2

Если в пределе $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x\operatorname{arctg}x}$ заменить (это нельзя делать) числитель на 0, то ответ случайно совпадёт.
Но! если знаменатель будет другим, напр., $x^2\operatorname{arctg}x$, то ответ уже не совпадётся, т.к. верный ответ будет не 0, а $\frac{1}{3}$.

Можно док, что числитель: $\boxed{x-\operatorname{arctg}x \sim \frac{x^3}{3} \text{ при } x\to0}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{(1+x^2)\cdot3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}}{3(1+x^2)\cancel{x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+0^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{числ.}\sim\frac{1}{3}(\text{знам.}) \text{ при } x\to0.$$

Теперь решим с другим знаменателем:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cancel{x^3}}{3}}{\cancel{x^2\cdot x}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

ДЗ V: № 5.359, 5.361, 5.362.

Раскрытие неопределённостей $[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$

Рас. $y = f(x)^{g(x)}$

Найдём $\lim\limits_{x \to x_0} y$.

План.

1) Найдём $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$

2) Найдём $\lim\limits_{x \to x_0} \ln y = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)\ln f(x)$

3) Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} y = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \ln y}$.

Пояснение. $y = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} =$

$= e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\left(y = e^{\ln y} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} y = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \ln y} \right)$$

если эти пределы $\exists$.

№ 5.365.

$$\lim_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x} = [0^0]$$

Решение. $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$

1) $\ln y = \ln(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}x\cdot\ln(\arcsin x)$

2) $\lim\limits_{x\to+0}\ln y = \lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}x\cdot\ln(\arcsin x) = [0\cdot\infty] =$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\operatorname{ctg}x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{\ln(\arcsin x)}{\operatorname{ctg}x}\right)'}{(\operatorname{ctg}x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{matrix}\sin x\sim x\\ \arcsin x\sim x\end{matrix}\right| \text{при } x\to 0 =$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to+0} y = e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln y} = e^0 = \boxed{1}$

№5.366.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}=[0^0].$$

Решение. $y=(\pi-2x)^{\cos x}$

1) $\ln y=\cos x\ln(\pi-2x)$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi-2x)=[0\cdot\infty]=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\pi-2x}\cdot(-2)}{-\cos^{-2}x\cdot(-\sin x)}=$$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2 x}{(\pi-2x)\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{2\cos x\sin x}{-2\sin x+(\pi-2x)\cos x}=$$

$$=4\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{-2\sin\frac{\pi}{2}+(\pi-2\cdot\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}}=4\cdot\frac{0}{-2}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y}=e^0=\boxed{1}$

Сканировано с CamScanner

№5.369

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = [\infty^0].$$

Решение. $y=(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

1) $\ln y = \frac{1}{x}\ln(x+2^x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+2^x) = [0\cdot\infty] =$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2^x}\cdot(1+2^x\ln 2)}{1} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2\ln 2}{1+2^x\ln 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^x}\ln 2\,\cancel{\ln 2}\,\cancel{\ln 2}}{\cancel{2^x}\,\cancel{\ln 2}\,\cancel{\ln 2}} = \ln 2$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y} = e^{\ln 2} = \boxed{2}$

Сканировано с CamScanner

№5.371.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}=[\infty^0].$$

Решение. $y=(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$

1) $\ln y=\ln(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}=(2x-\pi)\ln(\operatorname{tg}x)$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(2x-\pi)\ln\operatorname{tg}x=$

$$=\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{2}=t\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{2}\ ;\ 2x-\pi=2t+\pi-\pi=2t \\ x\to\frac{\pi}{2}-0\Rightarrow t\to 0- \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to0-}2t\ln\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=2\lim_{t\to0-}t\ln(-\operatorname{ctg}t)=$$

$$=2\lim_{t\to0-}t\ln\underbrace{\left(\frac{1}{-\operatorname{tg}t}\right)}_{=(-\operatorname{tg}t)^{-1}}=$$

$$=-2\lim_{t\to0-}t\ln(-\operatorname{tg}t)=[0\cdot\infty]=$$

$$=-2\lim_{t\to0-}\frac{\ln(-\operatorname{tg}\ )}{\frac{1}{t}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-2\lim_{t\to0-}\frac{\frac{1}{-\operatorname{tg}t}\left(-\frac{1}{\cos^2t}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=2\lim_{t\to0-}\frac{t^2}{\operatorname{tg}t\cos^2t}=$$

$$=2\lim_{t\to0-}\frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}\cos^2t}=2\cdot\frac{0}{1}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y}=e^0=\boxed{1}$

Сканировано с CamScanner

№5.373

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = [1^\infty].$$

Решение. $y=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

II сп.

1) $\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

2) $$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot \cancel{x^2}\cdot x^2}{(x^2+1)\cancel{x^3}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = 2\cdot 0 = 0$$

3) $$\lim_{x\to\infty} y = e^{\lim\limits_{y\to\infty}\ln y} = e^0 = \boxed{1}$$

I сп. Исп. II замечат. предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$$

II способ оказался значительно короче, но могло бы быть наоборот.

№ 5378

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty]$$

Решение. I сп. $\quad y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1) $\ln y = \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$

2) $$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{2x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^{\cancel{2}}}}{2x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}+\cancel{x}(-\sin x)-\cancel{\cos x}}{2\cancel{x}\sin x+x^{\cancel{2}}\cos x} =$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+\cos x+x(-\sin x)} =$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 1-0\cdot 0} = -\frac{1}{6}$$

3) $$\lim_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}.$$

Д/З VI № 5.364
5.367
5.370
5.372
5.376.

II сп. Исп. II замечат. предела

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right]^{\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}} =$$

$$= \left[\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \text{ при } x\to 0\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{3\cancel{x^2}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}\right)} = \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}.$$

Мы исп. и II замечат. предел,
и правило Лопиталя,
и эквивал. ф-ции.
Надо комбинировать способы.