Занятие 18.

Формула Тейлора

ф-ции $f(x)$ в точке x_0 – это равенство

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}+\underbrace{R_{n+1}(x)}$$

наз. многочленом Тейлора ф-ции $f(x)$ в точке x_0; обозн. $P_n(x)$

наз. остат. членом; он явл. б.м.ф. при $x\to x_0$.

След., $f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$.

Различные формы остаточного члена:

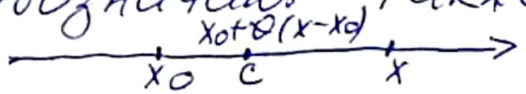
1) $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$ наз. остат. членом в форме Пеано

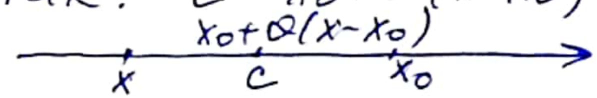
„о-малое" от $(x-x_0)^n$

2) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $c\in(x_0,x)$, если $x>x_0$, и $c\in(x,x_0)$, если $x<x_0$,

наз. остат. членом в форме Лагранжа

число c обозначают также так: $c=x_0+\theta(x-x_0)$, где $\theta\in(0,1)$.





Формула Маклорена ф-ции $f(x)$ – это её формула Тейлора в точке $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

Формулы Маклорена основных элемент. ф-ций

1. $e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$, где

$R_{n+1}(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$ (в форме Пеано) или

$R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (в форме Лагранжа)

2. $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+R_{2n+2}(x)$, где

$R_{2n+2}(x)=o(x^{2n+2})$ при $x\to 0$ (в форме Пеано) или

$$R_{2n+2}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3}\overset{\text{т.е.}}{=}\frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

(в форме Лагранжа).

3) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+1}(x)$, где

$R_{2n+1}(x) = o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$ (в форме Пеано) или

$R_{2n+1}(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \underset{\text{т.е.}}{=} \frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ (в форме Лагранжа)

4) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$, где

$R_{n+1}(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ или $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}$.

5) $\underbrace{(1+x)^{\alpha}}_{\boxed{(1+x)>0}} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$, где

$R_{n+1}(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ или $R_{n+1}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\theta x)^{\overbrace{\alpha-(n+1)}^{<0}}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

<u>Частные случаи для $\alpha = -1$:</u>

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ $\left(\text{или } R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1}\right)$

$\frac{1}{1-x} = (1+(-x))^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + o(x^n)$ $\left(\text{или } R_{n+1}(x) = \frac{1}{(1+\theta x)^{n+2}} \cdot x^{n+1}\right)$

6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$

7. $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$

8. $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - (\ldots$ подставить 6 $\ldots)$

9. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - (\ldots$ подставить 7 $\ldots)$

10. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^9)$ при $x \to 0$

11. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}(x)$, где

$R_{n+1}(x) = o(x^{2n+2})$ при $x \to 0$ или $R_{n+1}(x) = \frac{\operatorname{ch} \theta x}{(2n+3)!} x^{2n+3}$

12. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+1}(x)$, где

$R_{n+1}(x) = o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$ или $R_{n+1}(x) = \frac{\operatorname{ch} \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Для заданных функций написать ф-лу Маклорена

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ где } \theta\in(0,1).$$

← в форме Лагранжа

№5.383.

$$y=\sin x$$

Решение.

$f(x)=\sin x \quad \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi) \quad \Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin(x+2\pi) \quad \Rightarrow f^{(4)}(0)=0$

$\dots$

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) \quad \Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k\\ (-1)^k, & \text{если } n=2k+1\end{cases}$

Подставим в ф-лу Маклорена:

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+R_{2k+2}(x).$$

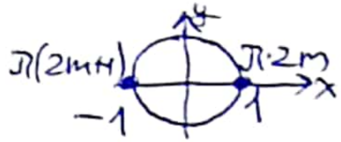
Найдём $R_{2k+2}(x) = \dfrac{f^{(2k+3)}(\theta x)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3} =$

$$= \frac{\sin\left(\theta x + \frac{\pi(2k+3)}{2}\right)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3} \quad (=)$$

Распишем $\sin\left(\theta x + \frac{\pi(2k+3)}{2}\right) = \sin\theta x \cos\frac{\pi(2k+3)}{2} + \cos\theta x \sin\frac{\pi(2k+3)}{2} =$

$$= \sin\theta x \cdot 0 + \cos\theta x \sin\left(\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\theta x \cdot (-\cos\pi k) = (-1)\cos\theta x \cos\pi k =$$

$$= (-1)\cos\theta x \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1}\cos\theta x$$



$$(=)\ \frac{(-1)^{k+1}\cos\theta x}{(2k+3)!}\, x^{2k+3}$$

Мы получили две записи остат. члена в форме Лагранжа.

№ 5.385

$$y=\ln(1+x)$$

Решение

$f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0)=2$

$f^{(4)}(x)=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0)=-3!$

$f^{(5)}(x)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} \Rightarrow f^{(5)}(0)=5!$

n	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
1	1
2	$-\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$-\frac{1}{4}$ и т.д.

...

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)! \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot\cancel{(n-1)!}^{\,1}}{\cancel{n!}_{\,n}}=$

$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Подставим в формулу Маклорена:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_{n+1}(x).$$

Найдём $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n=$

$$=\frac{\dfrac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot(1+\theta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Д/З I № 5.382, 5.384, 5.386}^*}$$

(хорошее решение см. с. 179–180 МГТУ-2 для остат. члена в форме Пеано)

Используя формулы Маклорена для элемент. ф-ций, написать первые n членов формулы Маклорена (без остаточного члена) для ф-ций:

№ 5.389.

$$y = \sin^2 x.$$

Решение. Напишем остат. член в форме Пеано.

Преобразуем функцию: $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

Формула Маклорена для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} + o(x^{2n}) =$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \ldots - (-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) =$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

№ 5.391

$y=\ln(4+x^2)$.

Решение.

Преобразуем функцию: $y=\ln 4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$.

Формула Маклорена для $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\Rightarrow \ln(4+x^2)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)=$$

$$=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4}\right)^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+o(x^{2n})=$$

$$=\ln 4+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}x^4+\frac{1}{3\cdot 4^3}x^6-\frac{1}{4\cdot 4^4}x^8+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{2n}+o(x^{2n})$$

№5.392

Д/З II №5.388, 5.390

$$y=\sqrt[3]{8+x^2}$$

Решение.

Преобразуем функцию: $y=\sqrt[3]{8\left(1+\frac{x^2}{8}\right)}=2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{8}}=2\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

Формула Маклорена для $(1+x)^\alpha$ при $\alpha=\frac{1}{3}$:

$$(1+x)^\alpha=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\Rightarrow y=2\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{\left(\frac{x^2}{8}\right)^2}{2!}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{\left(\frac{x^2}{8}\right)^3}{3!}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{\left(\frac{x^2}{8}\right)^n}{n!}+o\left(x^{2n}\right)\right)=$$

$8=2^3$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{8^2\,2!}x^4+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^6}{8^3\cdot 3!}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{x^{2n}}{8^n n!}+o\left(x^{2n}\right)\right).$$

№ 5.394.

Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $a=0$.

Построить графики данной функции и её многочлена Тейлора $2^{\underline{й}}$ степени.

Решение. При $a=0$ формула Тейлора – Маклорена (это ф-ла)

1) $P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$

$f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1^2} = 1$

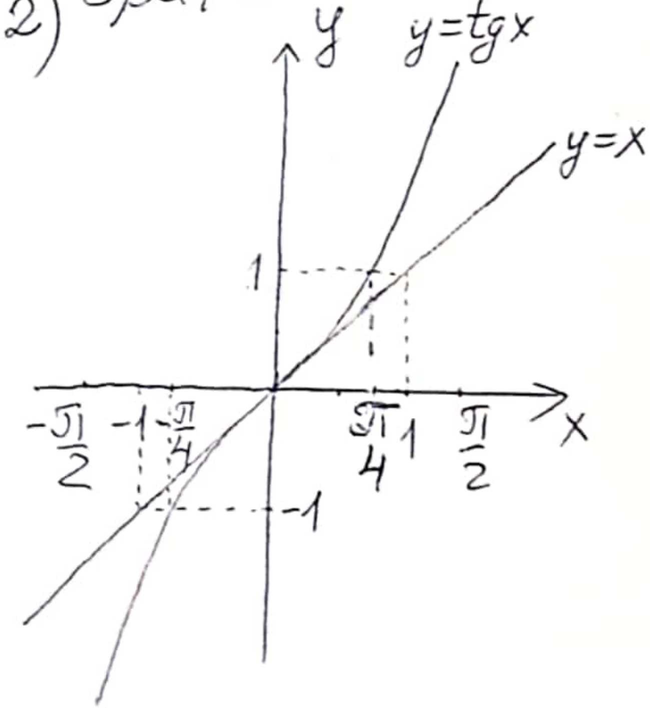
$f''(x) = \frac{-2(-\sin x)}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow f''(0) = 0$

$\Rightarrow \quad P_2(x) = x$

$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} x = x + o(x)}$

формула Тейлора

2) Графики:



Д/З III № 5.393, 5.396

№ 5.395

Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ в точке $a = 0$.

Построить графики данной ф-ции и её многочлена Тейлора $3^х$ степени.

Решение

1) $$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$f(0) = \arcsin 0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

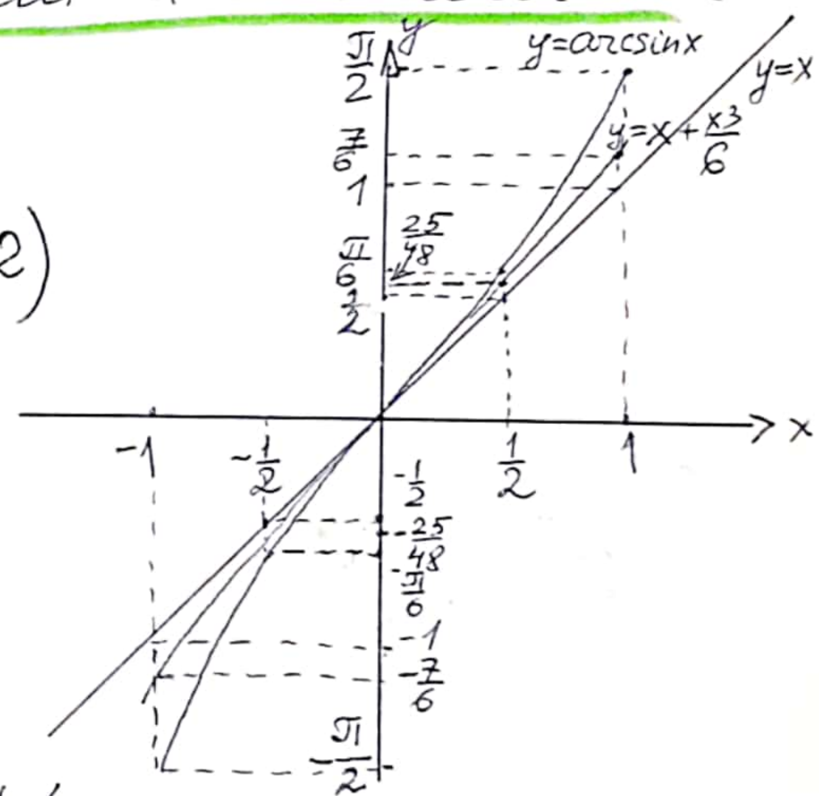
$$f''(x) = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) =$$

$$= \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''(0) = 0$$

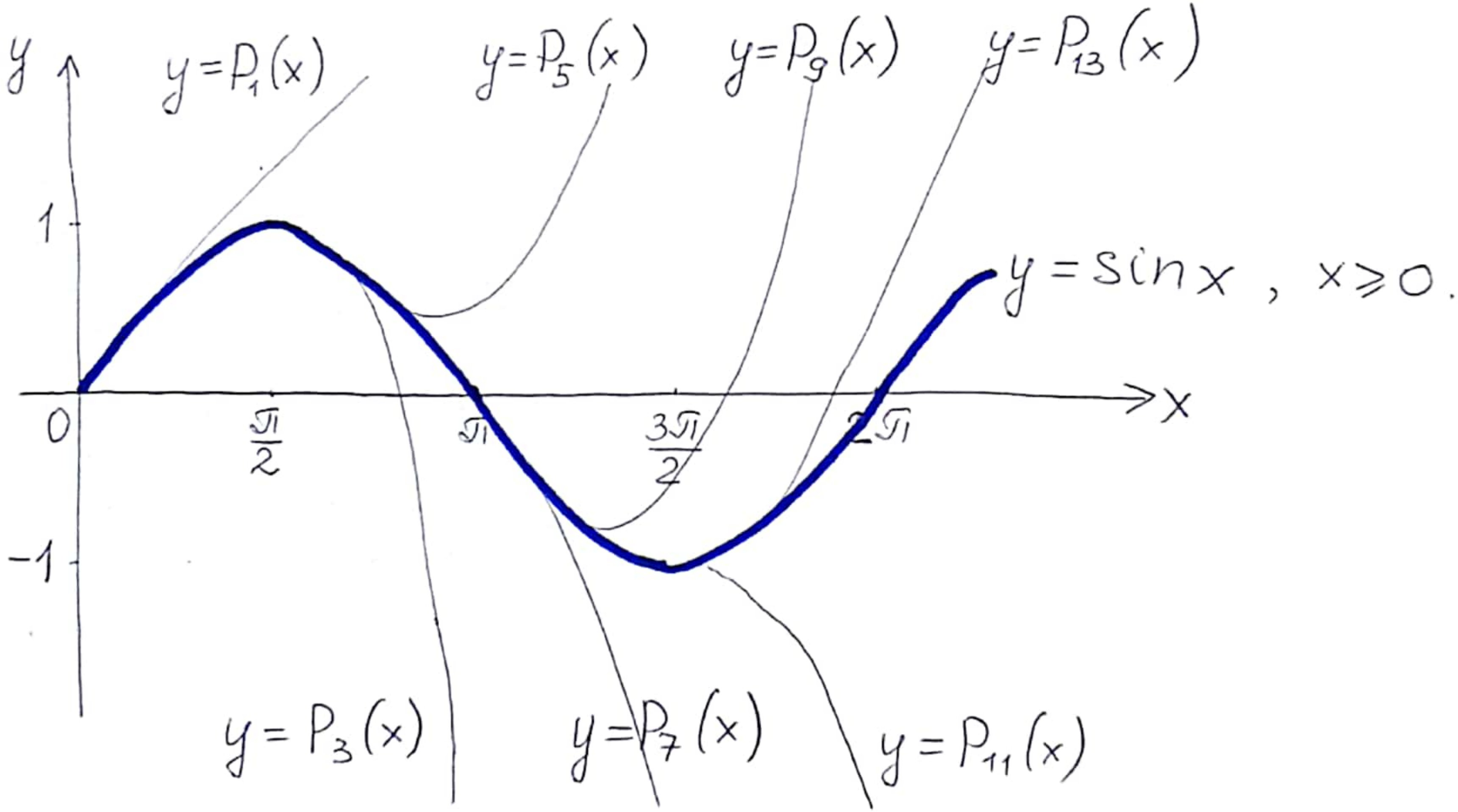
$$f'''(x) = \frac{1\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-\cancel{2}x)}{(1-x^2)^3} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left((1-x^2)+3x^2\right)}{(1+x^2)^3} = \frac{1+2x^2}{(1+x^2)^{2\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 1 \qquad \text{След., } P_3(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 \Rightarrow \boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

2)



<u>Обсуждение</u>. <u>Пример</u>. Рас. $f(x)=\sin x$ и $P_n(x)$ для $f(x)$.



$\sin x \approx x$ $(P_1(x)=x)$ По мере роста x точность этой формулы уменьшается.

Рас. $P_n(x)$ для $n>1$. С ростом степени n

1) увелич. точность приближ. рав-ва $\sin x \approx P_n(x)$ и

2) „расширяется сфера действия" многочленов $P_n(x)$.

Использование формулы Тейлора для приближенных вычислений.

$f(x) \approx P_n(x)$.

Абс. погрешность приближения $|R_{n+1}(x)| = |f(x) - P_n(x)|$.

Пусть требуется найти приближение $f(x)$ с абс. погрешностью $< \varepsilon$:

1) решим нер-во $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$ (1) относительно n; x нам известно, т.к. требуется найти приближенно $f(x)$.

2) Для найденного n запишем $P_n(x)$.

Тогда $f(x) \approx P_n(x)$ с заданной погрешностью.

Как решить нер-во (1)?

Будем исп. для приближ. вычислений остат. член в форме Лагранжа: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Найдём $M>0$: $M = \sup\limits_{[x_0, x]} |f^{(n+1)}(x)|$.

(или $[x, x_0]$)

Тогда $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$

Решим нер-во $\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} < \varepsilon$ (2) (вместо (1))

относительно n.

Тогда нер-во (1) для таких n тоже будет выполнятся.

Зам. Можно сразу решать нер-во (1).

№ 5.397.

Вычислить с абсолютной погрешностью $\varepsilon \le 0{,}001$ приближенные значения чисел

а) $\sin 1$ в) $\ln 1{,}05$.

Решение.

Рассмотрим ф-ю $y = \sin x$ и $x_0 = 0$ | $y = \ln(1+x)$ и $x_0 = 0$

Запишем формулу Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

При $x=1$:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\cos\theta}{(2n+3)!}}_{R_{n+1}(1)}$$

При $x = 0{,}05$

$$\ln 1{,}05 = 0{,}05 - \frac{1}{2}(0{,}05)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(0{,}05)^n + \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta \cdot 0{,}05)^{n+1}}0{,}05^{n+1}}_{R_{n+1}(0{,}05)}$$

Решим нер-во

$$|R_{n+1}| \le 0{,}001$$

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\cos\theta}{(2n+3)!}\right| \le \frac{1}{(2n+3)!}$$

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^n \cdot 0{,}05^{n+1}}{(n+1)(1+\theta\cdot 0{,}05)^{n+1}}\right| \le \frac{0{,}05^{n+1}}{n+1}$$

Вместо нер-ва $|R_{n+1}|<\varepsilon$ решим нер-во

$$\frac{1}{(2n+3)!} < \varepsilon \qquad\qquad \frac{0{,}05^{n+1}}{n+1} < \varepsilon$$

Тогда нер-во $|R_{n+1}|<\varepsilon$ тоже будет выполняться.

Для $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\frac{1}{(2n+3)!} < \frac{1}{1000}$$

Если $2n+3=6$, то $6! = 720 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{720} < \frac{1}{1000}$ неверно

Если $2n+3=7$, то $7! = 5040 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}$ верно $\Rightarrow$

$(2n+3=7 \Rightarrow n=2) \Rightarrow$ при $\forall n \geq 2$

нер-во будет выполняться

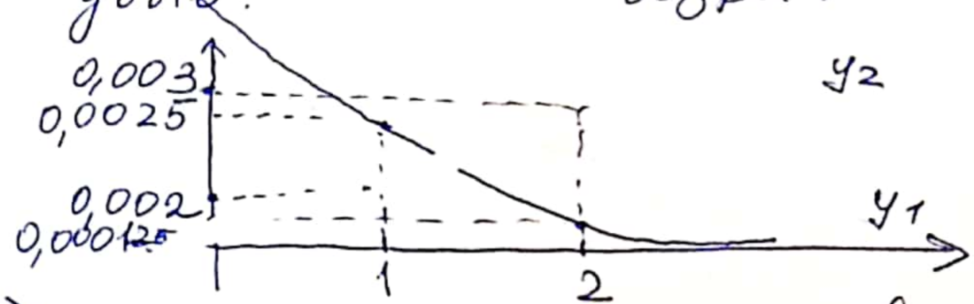
$$\frac{0{,}05^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{1000}$$

$$0{,}05^{n+1} < \frac{1}{1000}(n+1)$$

Рас. ф-ции

$y_1 = 0{,}05^{x+1}$ и $y_2 = \frac{1}{1000}(x+1)$

убыв. возрас.



$\Rightarrow \forall n$ $n \geq 2$ нер-во будет вып.

Сканировано с CamScanner

Найдём

$$P_{2n+1}(\ ) = P_5(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}842$$

$$P_2(0{,}05) = 0{,}05 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}05^2 \approx 0{,}049$$

Ответ: а) 0,842 ; в) 0,049 .

$\boxed{\text{Д/З } \underline{\text{IV}}: \ № 5.397 (б, г), \ 5.398 (б).}$

№ 5.400

Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$

$\sqrt{1-x} = (1+(-x))^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{(-x)^2}{2}+o(x^2) = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cancel{1}+\frac{1}{2}x-\cancel{\frac{1}{8}x^2}+o(x^2))-(\cancel{1}-\frac{1}{2}x-\cancel{\frac{1}{8}x^2}+o(x^2))}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x+o(x^2)+\frac{1}{2}x+o(x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+o(x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+o(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} (1+\underbrace{o(1)}_{\text{б.м.ф. при } x\to 0}) = 1$

<u>Замечание</u> $o(x^2)=o(x)$

Обратно неверно: $o(x) \neq o(x^2)$.

Пример $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(\cancel{x}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-o(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)=$

$=-\frac{1}{2}.$

Слагаемые можно заменять их разложениями Тейлора (это равенства, а не приближ. рав-ва)

Д/З $\overline{V}$ № 5.400 (в).

Для Д/З: № 5.386. (Из Д/З) | См с. 179-180 МГТУ-2

Т-ма Пусть для $f(x)$, дифференцируемой в т. $x=0$ необходимое число раз ($n+1$ раз)

$$f'(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + O(x^{n+1})$$

Тогда

$$f(x) = f(0) + c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + O(x^{n+1})$$

Пример $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Исп. ф-лу Маклорена для $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$; $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$, ..., $c_{2n} = (-1)^n$

След, по т-ме

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}).$$