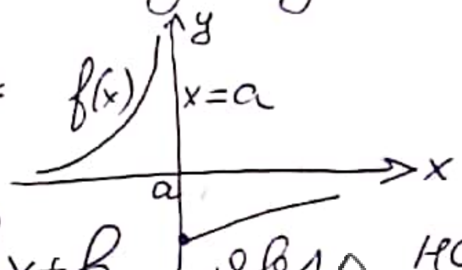
Занятие 19.

Асимптоты графиков функций.

Прямая ℓ наз. асимптотой графика ф-ции $y=f(x)$, если расстояние $\rho(M,\ell)$, где $M(x,f(x))$, стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат (т.е. при $\rho(O,M)\to\infty$).

Прямая $x=a$ явл. вертикальной асимптотой, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$. Пр.



Прямая $y=kx+b$ явл. наклонной асимптотой, если $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$

При $k=0$ наклонная асимптота наз. горизонтальной.

Найти асимптоты графика ф-ции.

№5.454.

Непрерывные ф-ции не имеют вертикальных асимптот.

$$y=\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$$

Решение. $D(y): x\neq 0$.

1) Вертик. асимптоты: $x=0$ (ось Oy), т.к.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}=\infty$$

2) Наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$x^2=|x|^2$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{|1-\frac{3}{x^2}|}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{|1-\frac{3}{x^2}|}}{|x|}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{|1-\frac{3}{x^2}|}}{x}=\begin{cases}1 & \text{при } x\to+\infty\\ -1 & \text{при } x\to-\infty\end{cases}\Rightarrow$$

$y=1$ при $x\to+\infty$

$y=-1$ при $x\to-\infty$

горизонт. ас-ты

Ответ: $x=0$; $y=\pm 1$ при $x\to\pm\infty$.

№5.455.

$$y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$$

Решение.

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

1) Вертик. асимптот нет, т.к. функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

2) Наклонные асимптоты: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x + \operatorname{arctg} 5x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(3 + \frac{\overset{\to \frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} 5x}}{\underset{\to\infty}{x}}\right) = 3,$$

т.к. $\underbrace{\operatorname{arctg} 5x}_{\text{огранич.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{б.м.ф}}$ – б.м.ф.

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\cancel{3x} + \operatorname{arctg} 5x - \cancel{3x}) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} 5x =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } x \to +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \text{ при } x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + \frac{\pi}{2} \text{ при } x \to +\infty \\ y = 3x - \frac{\pi}{2} \text{ при } x \to -\infty \end{cases}$$

Ответ: $y = 3x \pm \frac{\pi}{2}$ при $x \to \pm\infty$.

№ 5.456.

$$y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$$

Д/З I: № 5.452, 5.453, 5.457, 5.458.

Решение.

$D(y): \begin{cases} x+1>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad x \in (-1;0) \cup (0;+\infty).$

1) Вертик. асимптоты.

а) $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{\ln(x+1)}{\underset{\to 1}{x^2}} + \overset{\to -2}{2x}\right) = -\infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$

б) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 0 =$

$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \boxed{x=0}$

2) Наклонные асимптоты: $y = kx + b$

$k = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^3} + 2\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} + \lim\limits_{x\to +\infty} 2 = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{3x^2} + 2 = 2$

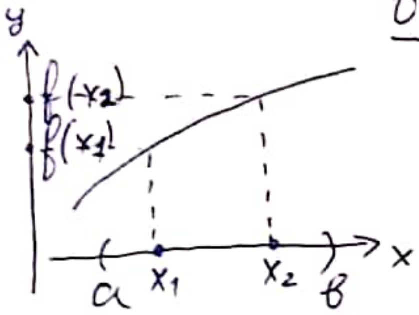
$b = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \cancel{2x} - \cancel{2x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} = 0$

$\Rightarrow \boxed{y = 2x}$

Ответ: $x=-1$; $x=0$; $\underset{\text{при } x\to +\infty}{y = 2x}$.

Интервалы возрастания и убывания функции. Точки экстремума.

Опр. Функция $f(x)$ наз.

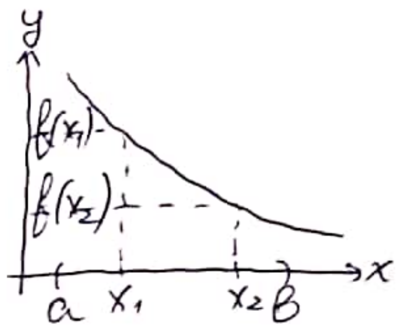


возрастающей | убывающей

на (a,b), если

$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$ | $f(x_1) > f(x_2)$



Достаточное условие монотонности ф-ции на (a,b)

Пусть $f(x)$ дифф. на (a,b).

Если

$f'(x) > 0$ | $f'(x) < 0$

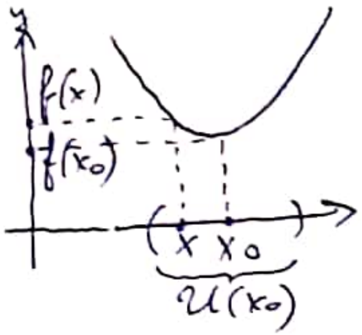
$\forall x \in (a,b)$,

то

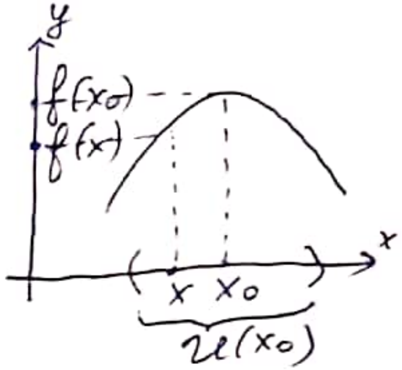
$f(x)$ возрастает | $f(x)$ убывает

на (a,b).

Опр. Точка x_0 наз. точкой минимума | точкой максимума функции $f(x)$, если $\exists\, U(x_0) : \forall x \in U(x_0)$



$f(x) > f(x_0)$. | $f(x) < f(x_0)$.



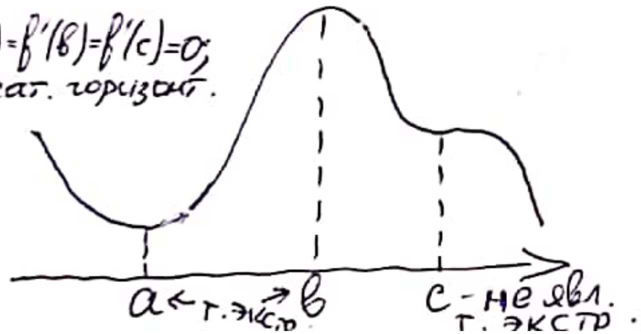
Минимумом | Максимумом функции $f(x)$ наз. её значение в точке минимума | максимума.

Необходимое условие т. экстремума

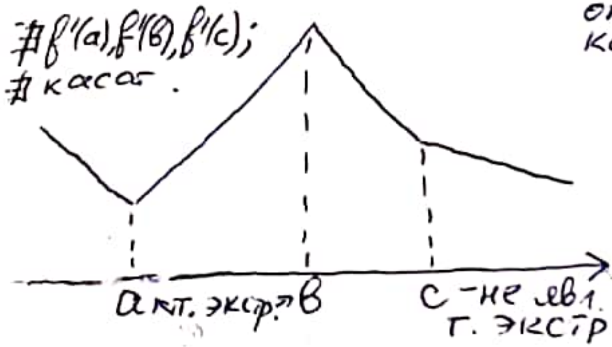
Если x_0 – т. экстремума ф-ции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $= \infty$ или $\nexists f'(x_0)$.

Зам. Обратно неверно. Примеры.

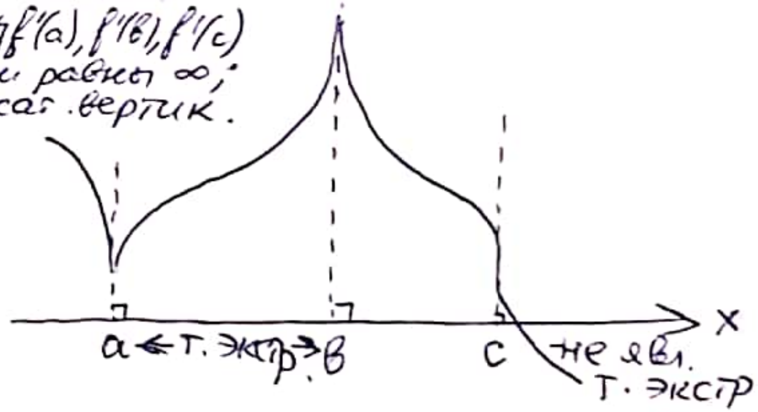
$f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$; касат. горизонт.



$\nexists f'(a), f'(b), f'(c)$; $\nexists$ касат.



$\nexists$ конечных $f'(a), f'(b), f'(c)$; они равны ∞; касат. вертик.



Достаточные условия т. экстремума непр. ф-ции

I. Пусть $f(x)$ непрерывна в $U(x_0)$ и дифф. в $\mathring{U}(x_0)$.

Если

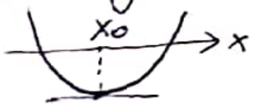
$\forall x \in U(x_0),\ x < x_0$ $f'(x) < 0$ и $\forall x \in U(x_0),\ x > x_0$ $f'(x) > 0$	$\forall x \in U(x_0),\ x <$ $f'(x) > 0$ и $\forall x \in U(x_0),\ x > x_0$ $f'(x) < 0$

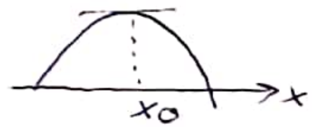
то

x_0 – точка мин.	x_0 – точка макс.

Если $\forall x \in U(x_0),\ x \neq x_0$, $f'(x) < 0$ или $f'(x) > 0$ (имеет одинаковый знак), то x_0 не явл. точкой экстремума.

II. Пусть $f(x)$ дифф. в $U(x_0)$, $f'(x_0) = 0$, и $f(x)$ дважды дифф. в т. x_0.





Если

$f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мин.	$f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка макс.

Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функций.

№5.404.

$y = x\sqrt{1-x^2}$

Решение.

1. $D(y)$: $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]$

2. Критические точки:

1) $y' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $D(y')$: $x \in (-1; 1)$

3) $y' = 0$ $\quad 1-2x^2=0 \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \boxed{x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ – крит. точки

3.

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
y'		$-$		$+$		$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

4. Интервалы монотонности:

$y \nearrow$ на $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$y \searrow$ на $\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$

5.

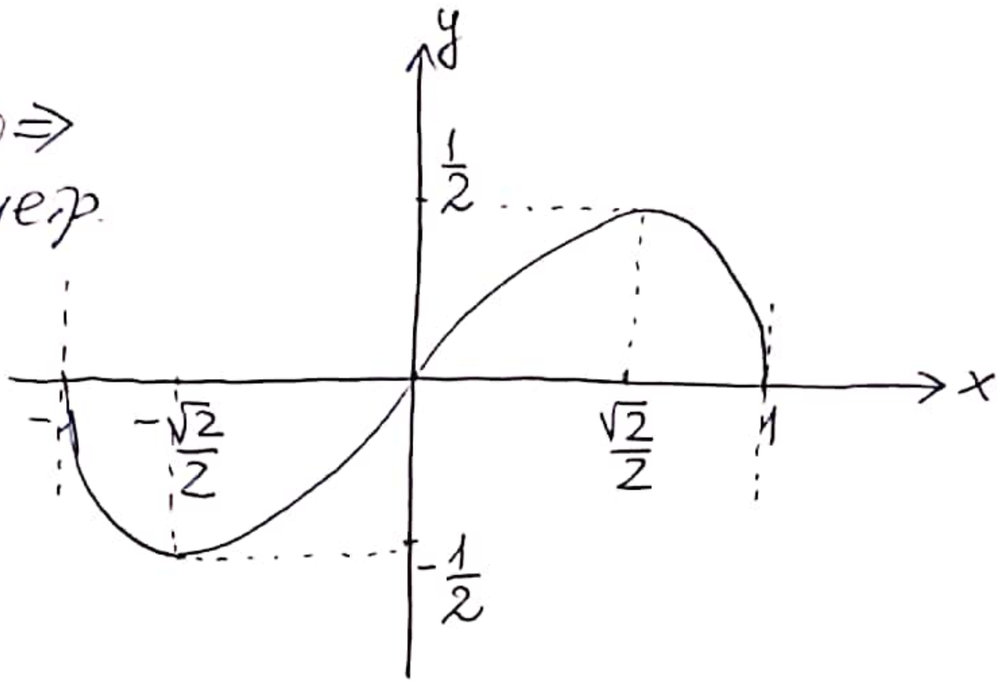
Точки экстремума	Экстремумы
$x_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$y_{min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
$x_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$y_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Дополнительно.

Ф-я $f(x)$ нечётная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ график симметр.

отн. т. O



Т. пересеч. с осями

к-т: с Ox $y=0$

$x=0$

$(0,0) \Leftarrow$

x	-1	$\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$	1
y'	∞	$-$	0	$+$	0	$-$	∞
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

В т. $x = \pm 1$ график имеет вертик. касательную.

№ 5.406

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

Решение.

1. $D(y)$: $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Критические точки:

1) $y' = \dfrac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

2) $D(y') = D(y)$.

3) $y' = 0$ $\quad \ln x = 1$ $\quad \boxed{x = e}$ крит. точка.

3.

y'		$-$		$-$		$+$
y	0	$\searrow$	1	$\searrow$	e	$\nearrow$

4. Интервалы монотонности:

$y \searrow$ на $(0; 1)$ и $(1; e)$

$y \nearrow$ на $(e; +\infty)$

5.

Точки экстр.	Экстремумы
$x_{min} = e$	$y_{min}(e) = e$

<u>Дополнительно.</u>

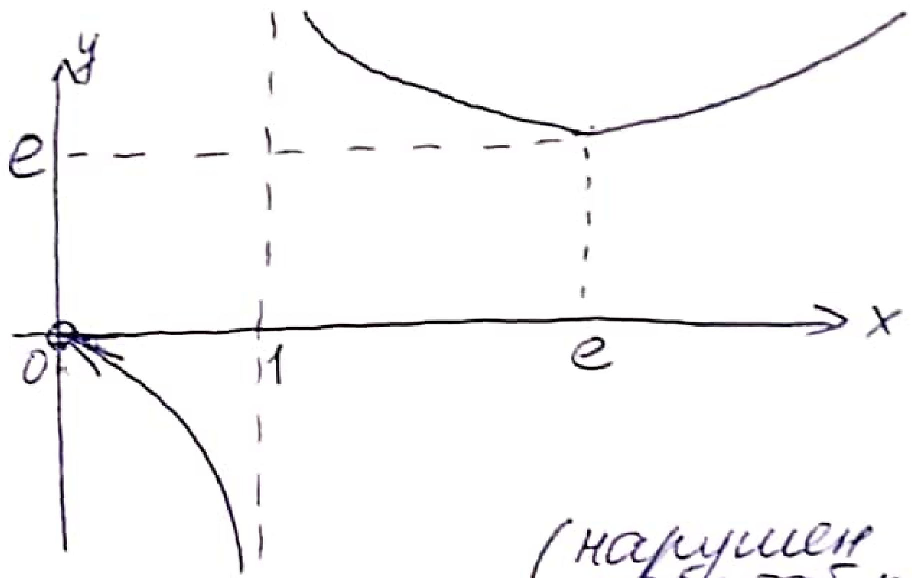
Ф-я общего вида.

Т. пересеч. с осями к-т:

с Ox: $y=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$

с Oy: $x=0 \notin D(y)$

<u>нет</u> т-к пересеч. с осями к-т



(нарушен масштаб по Oy)

x	$(0,1)$	$(1;e)$	e	$(e;+\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	↘	e	↗

№ 5.410.

$y = e^x \cos x$

Решение

1. $D(y) = \mathbb{R}$

2. Критические точки:

1) $y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

2) $D(y') = D(y)$

3) $y' = 0 \quad \cos x = \sin x \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}}$ крит. точки

3.

$$\begin{array}{c|ccccccccc} y' & & + & & - & & + & & - & \\ \hline y & -\frac{3\pi}{4} & \nearrow & \frac{\pi}{4} & \searrow & \frac{5\pi}{4} & \nearrow & \frac{9\pi}{4} & \searrow & \end{array} \quad x$$

$\underbrace{\frac{\pi}{4} \ldots \frac{9\pi}{4}}_{2\pi}$

Т.к $e^x > 0$, то чередование знаков y' происходит с периодом $T = 2\pi$

4. Интервалы монотонности:

$y \searrow$ на $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

$y \nearrow$ на $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

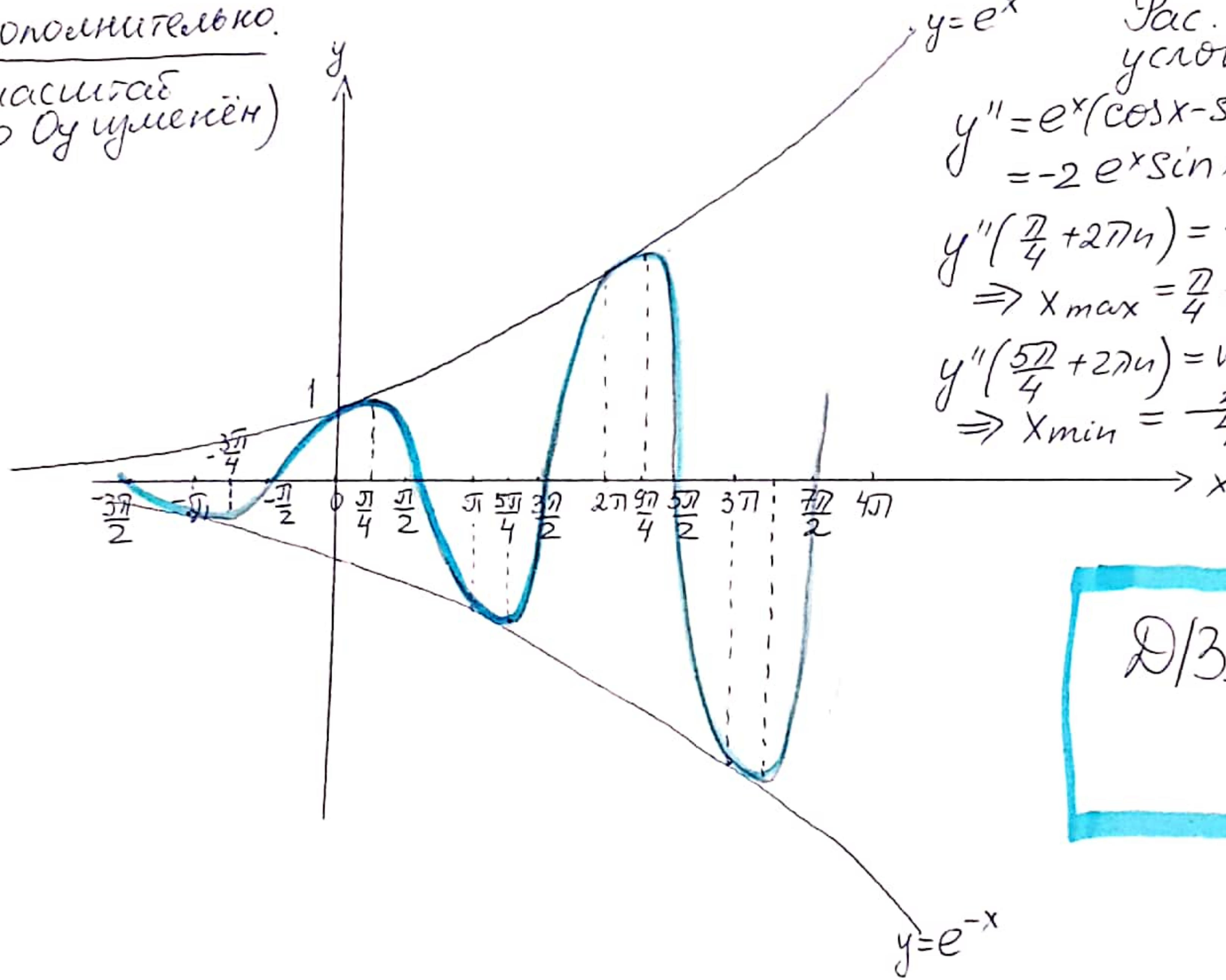
5. Точки экстр. и экстремумы:

$x_{max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \; y_{max}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi n} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_{min} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \; y_{min}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) = e^{\frac{5\pi}{4} + 2\pi n}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Дополнительно.

(масштаб по Oy уменён)



Рас. 2-е достат. условие.

$$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=$$
$$=-2e^x\sin x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=-\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}<0$$

$$\Rightarrow x_{max}=\frac{\pi}{4}+2\pi n$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)=\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}+2\pi n}>0$$

$$\Rightarrow x_{min}=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$$

$\Rightarrow$ те же ответ!

Д/З II: № 5.405
5.408
5.409