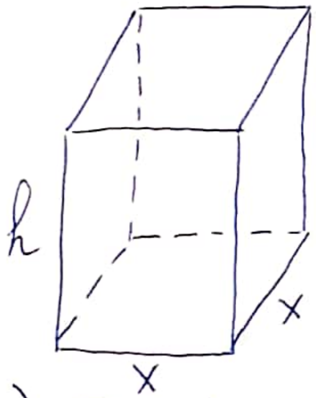
Занятие 22.

Наибольшие и наименьшие значения ф-ции (задачи с практич. содержанием).

№866.

Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее кол-во жести?

Решение.



1) Составим ф-ю для исслед:

$S = x^2 + 4xh$

Выразим S через 1 неизвестную:

$x^2h = V \Rightarrow h = \frac{V}{x^2}.$

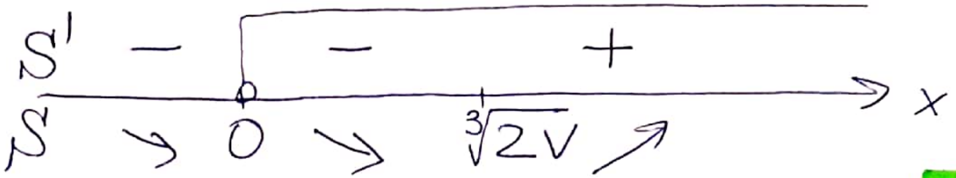
След, $S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{4V}{x}$

2) $D(S)$: $x \in (0; +\infty)$

$S'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2} = \frac{2(x^3 - \overbrace{2V}^{\sqrt[3]{2V}^3})}{x^2} = \frac{2(x - \sqrt[3]{2V})(x^2 + x\sqrt[3]{2V} + \sqrt[3]{2V}^2)}{x^2}$

$D(S') = D(S)$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2V}$



След, $x_{min}=\sqrt[3]{2V}$

$\Downarrow$

$h=\dfrac{V}{\sqrt[3]{2V}^2}=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$

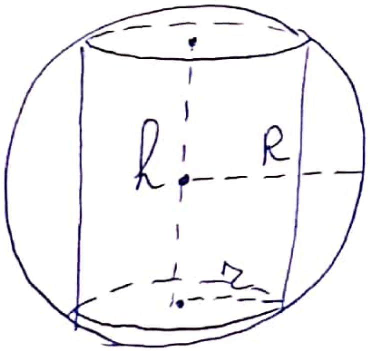
Ответ: $x=\sqrt[3]{2V}$, $h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$.

Зам. Ф-я имеет одну т.min на $D(f)=(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ в ней дост. наим. значение

№868.

В данный шар вписать цилиндр с наибольшим объёмом.

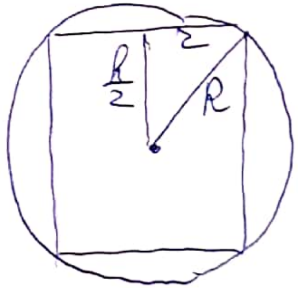
Решение. 1) Составим ф-ю:



$V=\pi r^2 h$

Выразим V через 1 неизв.:

$r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2=R^2$ по т-ме Пифагора



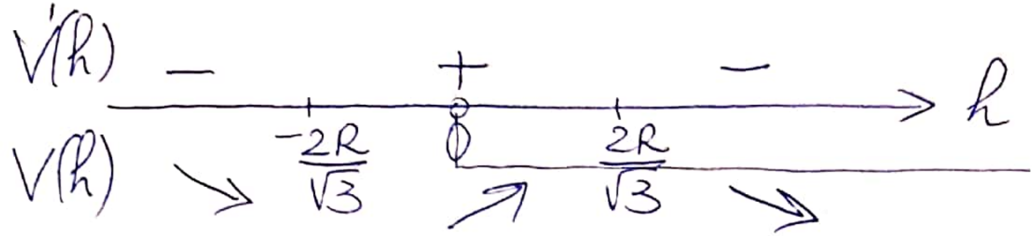
$\Rightarrow r^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$.

След., $V=\pi\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)h=-\dfrac{\pi}{4}\left(h^3-4R^2h\right)$

2) $D(V)$: $h\in(0;2R)$

$V'(h)=-\dfrac{\pi}{4}\left(3h^2-4R^2\right)=-\dfrac{3\pi}{4}\left(h^2-\dfrac{4}{3}R^2\right)=-\dfrac{3\pi}{4}\left(h-\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)\left(h+\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$

$D(V')=D(V)$.



След, $h_{max} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2}{3}R^2$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

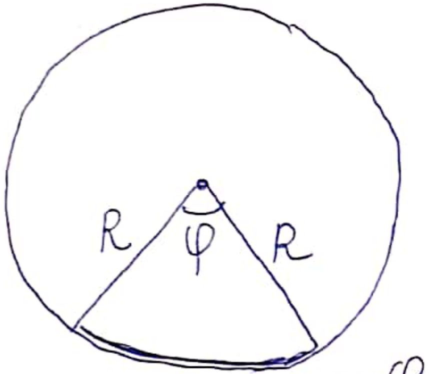
Ответ: $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.

Зам. В этой задаче опечатка в условии.

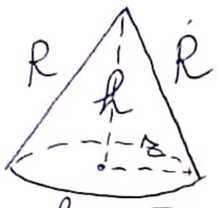
№875.

Из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости

Решение. 1) Составим функцию: $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$



$l=R\varphi$ (в радианах)



$l=2\pi r$

Выразим V воронки через одну неизвестную:

$l=R\varphi=2\pi r \Rightarrow r=\frac{R\varphi}{2\pi} \Rightarrow r^2=\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}$

$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$

След., $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}=$

$=\frac{R^3}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$

2) $D(V):\ \varphi\in(0;2\pi)$

$V'(\varphi)=\ldots=-\frac{3R^3}{24\pi^2}\varphi\left(\varphi-\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\pi\right)\left(\varphi+\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\pi\right)$

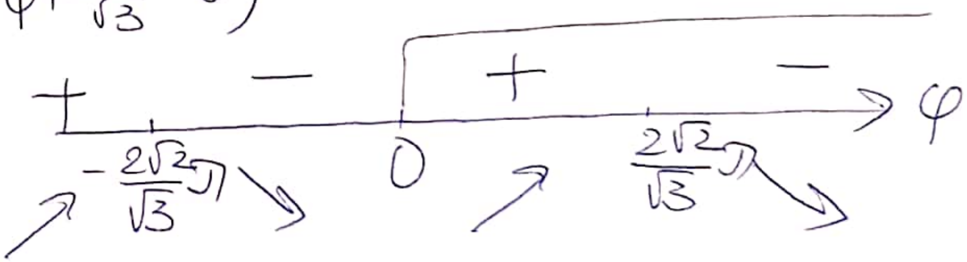
$D(V')=D(V)$

$V'(\varphi)=0$

$\varphi=0 \in D(V)$

$\varphi=\pm\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\pi$

$-\ \notin D(V)$



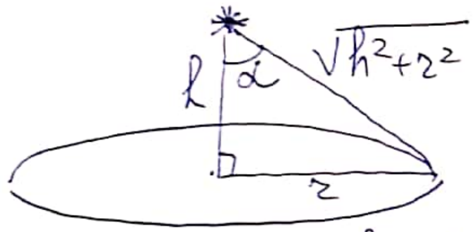
След., $\varphi_{max}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\pi$.

Ответ: $\varphi=\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\pi$

№884.

Лампа висит над центром круглого стола радиуса r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещенность прямо пропорц. cos угла падения лучей света и обратно пропорц. квадрату расст-я от источника света.)

Решение



1) $I = k\dfrac{\cos\alpha}{h^2+r^2} = k\dfrac{\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}}{h^2+r^2} = k\cdot\dfrac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}}$

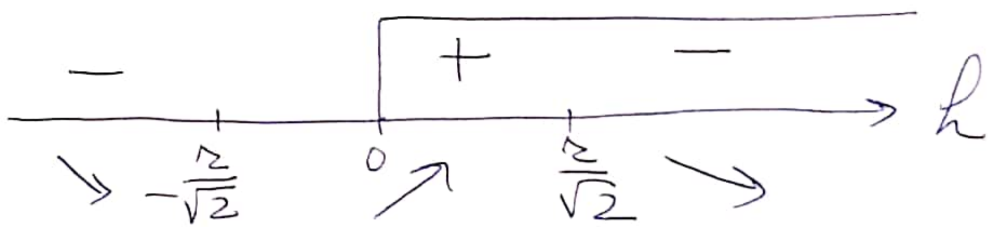
2) $D(I): h \in (0; +\infty)$

$$I'(h) = k\frac{(h^2+r^2)^{3/2} - h\cdot\cancel{\frac{3}{2}}(h^2+r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}h}{(h^2+r^2)^3} = \ldots$$

$$\ldots = -2k\frac{h^2-\frac{r^2}{2}}{(h^2+r^2)^{5/2}}$$

$D(I') = D(I)$

$I'(h) = 0 \qquad h = \pm\dfrac{r}{\sqrt{2}}$



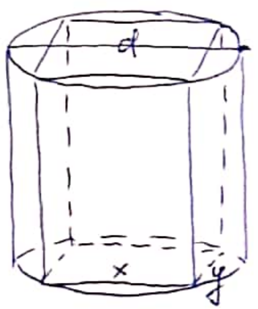
След, $h_{max} = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

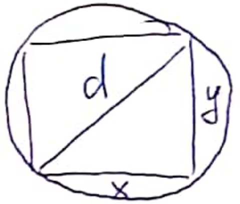
№885

Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление а) на сжатие, б) на изгиб. (Сопротивление балки на сжатие прямо пропорц. площади её поперечного сечения, а на изгиб – произв. ширины на квадрат высоты).

Решение. Сопротивление балки

на сжатие: $f = k_1 xy$ | $g = k_2 x y^2$ на изгиб





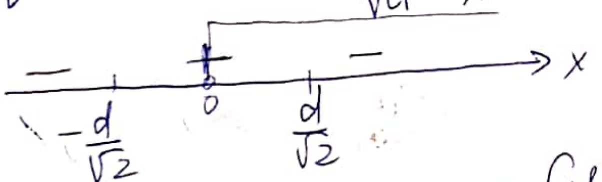
$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = d^2 - x^2$, $y = \sqrt{d^2 - x^2}$

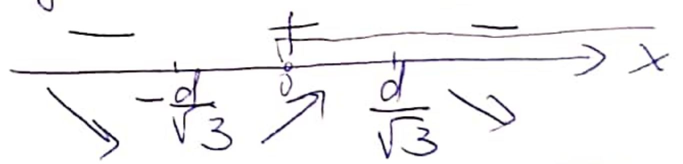
След.:

$f(x) = k_1 x\sqrt{d^2 - x^2}$ | $g(x) = k_2 x(d^2 - x^2)$

$D(x): x \in (0; d)$

$f'(x) = \ldots = -2k_1 \dfrac{x^2 - \frac{d^2}{2}}{\sqrt{d^2 - x^2}}$ | $g'(x) = -3k_2\left(x^2 - \dfrac{d^2}{3}\right)$





$x_{max} = \dfrac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - \dfrac{d^2}{2}} = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ | $x_{max} = \dfrac{d}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - \dfrac{d^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,d$

Ответ: $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ – на сжатие; $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,d$ – на изгиб.

№889.

Определить, при каком диаметре y круглого отверстия в плотине секундный расход воды Q будет иметь наибольшее значение, если $Q = cy\sqrt{h-y}$, где $c = const$, h – глубина нижней точки отверстия.

Решение.

$$Q = cy\sqrt{h-y}$$

$$D(Q): 0 < y \le h$$

$$Q'(y) = c\left(\sqrt{h-y} + y\frac{-1}{2\sqrt{h-y}}\right) = c\left(\frac{2(h-y)-y}{2\sqrt{h-y}}\right) = c\,\frac{2h-3y}{2\sqrt{h-y}} = -\frac{3}{2}c\,\frac{\left(y-\frac{2}{3}h\right)}{\sqrt{h-y}}$$

y	0		$\frac{2}{3}h$	
Q'		$+$		$-$
Q		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow y_{max} = \frac{2}{3}h.$

Ответ: $\frac{2}{3}h$.

Д/З I: № 873, 876, 877, 882, 883, 886, 888

В след. раз РК2 по МА!