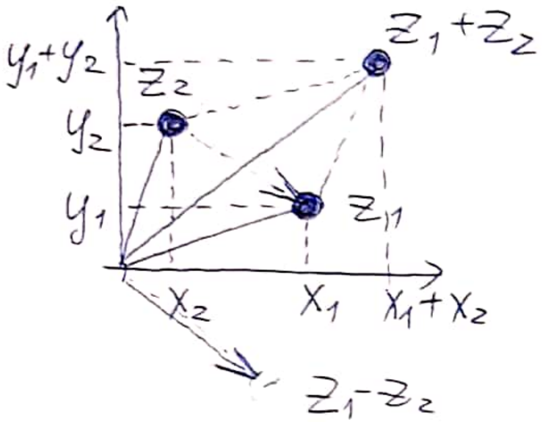
Занятие 24

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.



1.

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Пример

$$z_1 = 1+2i$$
$$z_2 = 3+4i$$
$$z_1+z_2 = 4+6i$$
$$z_1-z_2 = -2-2i$$

ДЗ I: $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1+4i$

z_1+z_2 – ?

z_1-z_2 – ?

Сделать рисунок

2.

$$z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}$$

Сканировано с CamScanner

№1.421.

Вычислить:

$(2+3i)(3-i) = 6-2i+9i-3\underbrace{i^2}_{-1} = 6+7i+3 = 9+7i$ Ответ: $9+7i$.

№1.423.

I сп.

$(1-i)^3-(1+i)^3 = ((1-i)-(1+i))((1-i)^2+(1-i)(1+i)+(1+i)^2) =$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= -2i((1-2i+i^2)+(1^2-i^2)+(1+2i+i^2)) =$

$= -2i(\cancel{1}-\cancel{2i}-\cancel{1}+1+1+\cancel{1}+\cancel{2i}-\cancel{1}) =$

$= -2i(2) = -4i$

II сп. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(1-i)^3-(1+i)^3 = (\cancel{1^3}-3\cdot1\cdot i+\cancel{3\cdot1\cdot i^2}-\underbrace{i^3}_{-i})-(\cancel{1^3}+3\cdot1\cdot i+\cancel{3\cdot1\cdot i^2}+\underbrace{i^3}_{-i}) =$

$\boxed{i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i}$ $= -6i+i+i = -4i$ Ответ: $-4i$

$\boxed{\text{Д/З II. № 1.424, 1.425.}}$

Сканировано с CamScanner

№ 1.428.

$$\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}=$$

$$=\frac{(1+i)(3+i)^2-(1-i)(3-i)^2}{(3-i)(3+i)}=$$

Вычислим отдельно:

$(3+i)^2=9+6i+i^2=8+6i$

$(3-i)^2=9-6i+i^2=8-6i$

$$=\frac{(1+i)(8+6i)-(1-i)(8-6i)}{9-i^2}=$$

$$=\frac{(\cancel{8}+6i+8i-\cancel{6})-(\cancel{8}-6i-8i-\cancel{6})}{10}=\frac{14i-(-14i)}{10}=$$

$$=\frac{28i}{10}=\frac{14}{5}i$$

Ответ: $\frac{14}{5}i$.

Сканировано с CamScanner

№ 1.429.

$$\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$$

Решение.

1)

n	i^n
0	1
1	i
2	-1
3	$-i$
4	1
5	i

и т.д.

$$\Rightarrow \begin{matrix} i^{4k}=1 \\ i^{4k+1}=i \\ i^{4k+2}=-1 \\ i^{4k+3}=-i \end{matrix}, \quad k\in\{0,1,2,\dots\}$$

След, $i^5=i$, $i^{19}=i^{16+3}=-i$

2) Найдём $\left(\frac{i+2}{-i+1}\right)^2=\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2=$

$$=\left(\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\left(\frac{2+2i+i+i^2}{1^2-i^2}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}(1+3i)^2=\frac{1}{4}(1+6i+9\cdot i^2)=\frac{1}{4}(1+6i-9)=$$

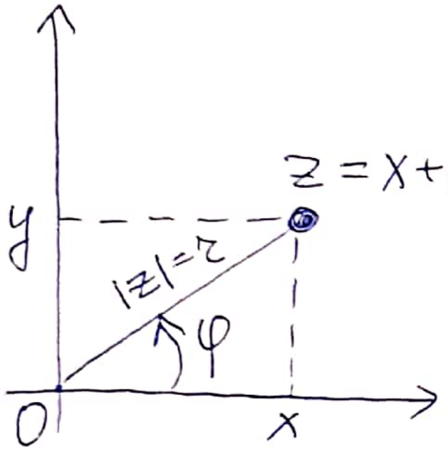
$$=\frac{1}{4}(-8+6i)=-2+\frac{3}{2}i$$

Ответ: $-2+\frac{3}{2}i$

$\boxed{\text{Д/З III № 1.426, 1.427}}$

Сканировано с CamScanner

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



$z = x+iy \rightarrow$ 1) модуль z: $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$. Обозн. r

2) аргумент z:

$\arg z = \varphi \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z} = x + iy = \boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Сканировано с CamScanner

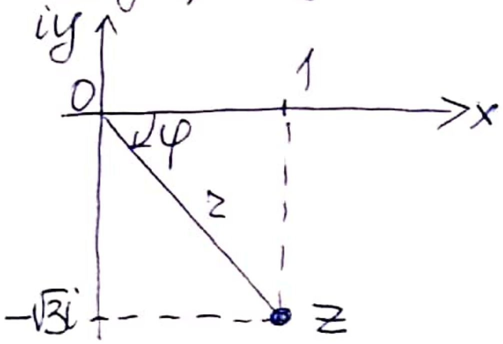
№ 1.436.

Представить в тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости: $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Решение. Запишем z в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arg z$.

I сп.

Из рисунка:



$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$ $(\arg\varphi = -\frac{\pi}{3})$

минус, т.к. φ против час. стрелки

След, $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

II сп.

Формальные вычисления:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg\varphi = -\frac{\pi}{3}$

След., $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

Ответ: $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

(или $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$)

Сканировано с CamScanner

№ 1.440.

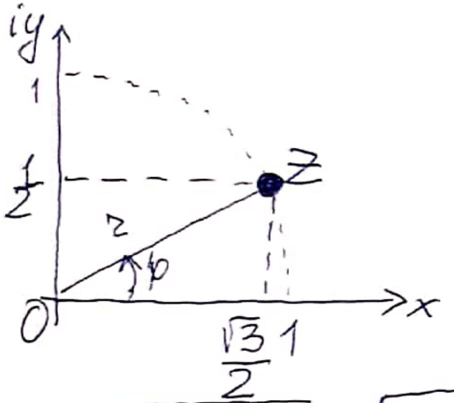
Представить в триг. форме и изобразить на комплексной плоскости: $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$.

Решение. Запишем z в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi=\arg z$.

Преобразуем $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

I сп.

Из рисунка:



$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}\quad \left(\arg\varphi=\frac{\pi}{6}\right)$$

След., $z=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

II сп.

Формальное вычисление:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi&=\frac{y}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \arg\varphi=\frac{\pi}{6}$$

След., $z=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Ответ: $1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Сканировано с CamScanner

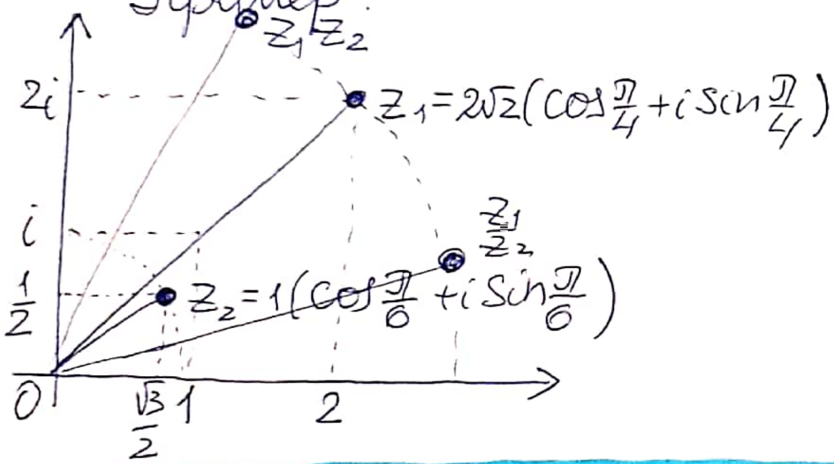
Умножение и деление чисел, записанных в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Пример:



$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Д/З IV: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$; нарисовать.

Сканировано с CamScanner

№ 1.438

ДЗ V: № 1.435, 1.437, 1.439.

$$z=\frac{1-i}{1+i}$$

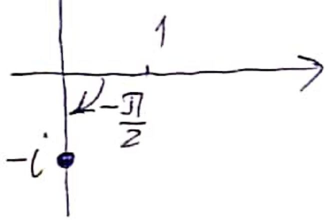
Решение. I сп. 1) Преобразуем: $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1^2-2i+i^2}{1^2-i^2}=$

$$=\frac{-2i}{2}=-i,$$

т.е. $z=0+(-1)i$ $(x=0,\ y=-1)$

Из рисунка:

$z=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$



2) Формальными вычислениями:

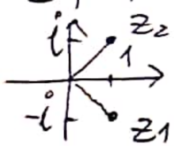
$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0\\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \arg\varphi=-\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3\pi}{2}$)

След., $z=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

II сп. 1) Запишем числ. и знам. в триг. форме.

$z_1=1-i \Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$



$z_2=1+i \Rightarrow z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$

$=1\left(\cos\left(\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Ответ: $1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ или $1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Сканировано с CamScanner

Возведение комплексного числа в натур. степень.

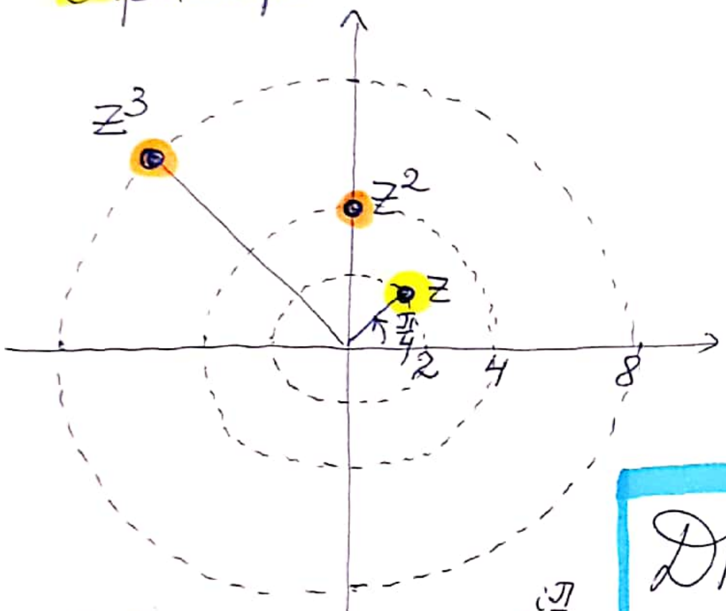
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

ФОРМУЛА МУАВРА

Пример. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$ В триг. форме:

1) $z^2 = 2^2\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) =$
$= 4i$

2) $z^3 = 2^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 3\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$



В показат. форме: $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) $z^2 = 2^2 e^{i\,2\cdot\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} =$
$= 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$;

2) $z^3 = 2^3 e^{i\,3\cdot\frac{\pi}{4}} =$
$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i.$

Д/З VI

1) $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
Найти и нарисовать z^2, z^3, z^4, z^5

2) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
Найти и нарисовать z^2, z^3.

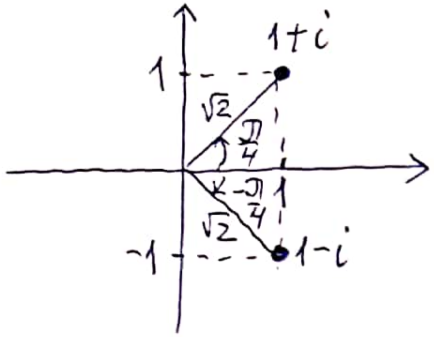
Сканировано с CamScanner

№ 1.486

Вычислите $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Решение.

Запишем в триг. форме:



$$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\bar{z} = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^5 = \sqrt{2}^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\bar{z}^3 = \sqrt{2}^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{z^5}{\bar{z}^3} = \frac{\sqrt{2}^5}{\sqrt{2}^3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2(1+i0) =$$
$$= 2$$

Ответ: 2

<u>Опр</u> $z^0 = 1$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$

След., определена целая степень компл. числа z.

Сканировано с CamScanner

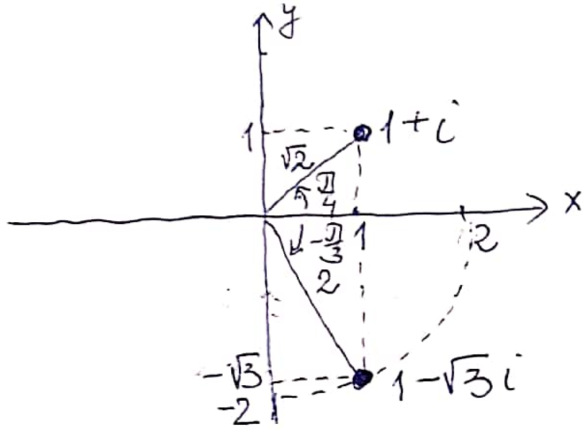
№1.488.

Вычислить $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$

Решение. $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6} =$

Запишем в триг. форме: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$



$(1+i)^8=\sqrt{2}^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=$
$=16$

$(1-i\sqrt{3})^6= 2^6\left(\cos\left(6\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(6\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=$
$=64(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))= \quad 64$

$= \dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Д/З VII № 1.485, 1.487.}}$

Извлечение корня нат. степени из компл. числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \Rightarrow$$

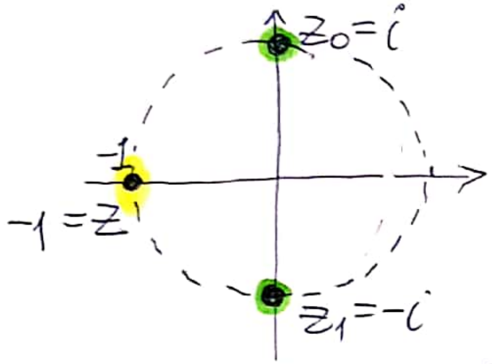
$$\Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Это n чисел $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

$\boxed{\text{ФОРМУЛА МУАВРА}}$.

Примеры

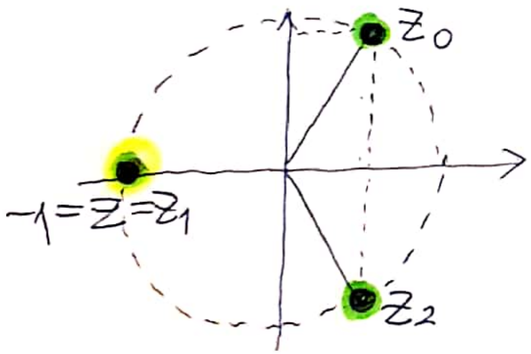
1) $z = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)$, где $k = 0, 1$.



След., $z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

2) $z = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0, 1, 2$.



След., $z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -1$

$z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

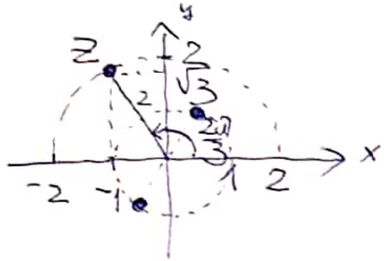
Д/З VIII: $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{i}$; $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$.

Сканировано с CamScanner

№1.499.

Найти $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

Решение. Запишем $z=-1+i\sqrt{3}$ в триг. форме:



$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Тогда
$$\sqrt{z}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}+\frac{2\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}+\frac{2\pi}{2}k\right)\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)\right)$$

$k=0 \Rightarrow z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

$k=1 \Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\boxed{\text{Д/З IX: № 1.500, 1.501}}$

Сканировано с CamScanner